

Álgebra lineal

Taller 5

Matrices y vectores.

Fecha de entrega: 26 de febrero de 2026

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Responda a las siguientes preguntas y justifique su respuesta.

2 pts.

(a) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts.

(b) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ con $x_1 = 2$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts.

(c) ¿Cuántos $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ existen tal que la primera componente de $A\vec{x}$ sea igual a 3?

5 pts.

2. (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n)$ y sea $\vec{e}_k$ el k -ésimo vector unitario en $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya k -ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule $A\vec{e}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A .

(b) Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).

(c) Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.

(d) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{v} = \vec{0}$.

(e) Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

8 pts.

3. (a) Sean $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que obtenemos al rotar $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ por $\pi/3$.

(b) Encuentre la matriz $R \in M(2 \times 2)$ que representa rotación por $\pi/3$.

Hint. Ejercicio 2.

(c) Encuentre la matriz $P \in M(2 \times 2)$ que representa proyección sobre el eje y .

Hint. Usar un procedimiento análogo a (a) y (b).

(d) Calcule RP y PR .

(e) Tome un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ y haga gráficas de $\vec{w}$, $P\vec{w}$ y $RP\vec{w}$ y de $\vec{w}$, $R\vec{w}$ y $PR\vec{w}$ y explica porque esto ayuda a entender por qué en general la multiplicación de matrices no es conmutativa.

1 pts.

4. (a) Sea $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

1 pts.

(b) Demuestre que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (Es decir: Si $A \in M(n \times n)$, entonces existen matrices $B, C \in M(n \times n)$ tal que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.)

Ejercicios voluntarios¹

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

6. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.

(b) Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \parallel \vec{x}$. Para cada tal $\vec{x}$, encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

4 pts.

7. (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{e}_1$ a $\vec{v}$ y el vector $\vec{e}_2$ a $\vec{w}$.

(ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{v}$ a $\vec{e}_1$ y el vector $\vec{w}$ a $\vec{e}_2$.

(b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

8. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.

(b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

9. Sea $A \in M(m \times n)$.

(a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Sea $B \in M(n \times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.

(c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.