

Álgebra lineal

Taller 3

Proyecciones ortogonales y producto cruz; rectas en $\mathbb{R}^n$.

Fecha de entrega: 12 de febrero de 2026

7 pts.

1. (a) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (iii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}.$$

- (b) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(iii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (iv) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 + \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1 pts.

- (a) Calcule $\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$.

2 pts.

- (b) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 0$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

2 pts.

- (c) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 2$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

1 pts.

3. (a) Calcule el área del triángulo con los vértices adyacentes $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(-1, 2, -5)$.

1 pts.

- (b) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

- (c) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los vectores del literal (b). ¿Cuántos vectores $\vec{a}$ con norma 7 hay tal que el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ sea 24? Diga geométricamente cómo se encuentran todos los $\vec{a}$ con esta propiedad y calcule dos de ellos.

4 pts.

4. Dados líneas L_1 y L_2 y el punto P , determine:

- si L_1 y L_2 son paralelas,
- si L_1 y L_2 tienen un punto de intersección,
- si P pertenece a L_1 y/o a L_2 ,
- una recta paralela a L_2 que pase por P .

(a) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad P(5, 2, 11).$

(b) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : x = t + 1, y = 3t - 4, z = -t + 2, \quad P(5, 7, 2).$

Ejercicios voluntarios¹

5. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.
- (a) Demuestre que $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{a}\|$.
 - (b) Encuentre condiciones para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| = \|\vec{a}\|$.
 - (c) ¿Es cierto que $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{b}\|$?
6. (a) Demuestre que no existe un elemento neutral para el producto cruz en $\mathbb{R}^3$. Es decir: Demuestre que no existe ningún vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w}$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- (I) Encuentre todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 - (II) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.