

Álgebra lineal

- 9 pts. 1. Para las siguientes matrices, encuentre los vectores propios, los espacios propios, una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $C^{-1}AC = D$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 3 pts. 2. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) ¿Existe una matriz $A \in M(3 \times 3)$ tal que \vec{v} es vector propio con valor propio 5 y \vec{w} es vector propio con valor propio 2?
- (b) ¿Existe una matriz simétrica $A \in M(3 \times 3)$ tal que \vec{v} es vector propio con valor propio 5 y \vec{w} es vector propio con valor propio 2?
- (c) ¿Existe una matriz simétrica $A \in M(3 \times 3)$ tal que \vec{v} es vector propio con valor propio 5 y \vec{w} es vector propio con valor propio 5?

En los tres casos debe encontrar una matriz que sirva o justificar por qué no existe.

- 4 pts. 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentre matrices invertibles F y G y matrices diagonales D y E tal que

$$FAF^{-1} = D \quad \text{y} \quad G^{-1}AG = E.$$

- 4 pts. 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule A^{2025} y $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Hint. Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $A = C^{-1}DC$ y use esto para calcular A^n .

Ejercicios voluntarios¹

5. (a) Sea $\Phi : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2 \times 2, \mathbb{R})$, $\Phi(A) = A^t + A$. Encuentre los valores propios y los espacios propios de Φ .
- (b) Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Encuentre los valores propios y los espacios propios de $T : P_2 \rightarrow P_2$, $Tp = p' + 3p$.
- (c) Sea R la reflexión en el plano $P : x + 2y + 3z = 0$ en \mathbb{R}^3 . Calcule los valores propios y los espacios propios de R .

6. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matriz hermitiana tal que todos sus autovalores son estrictamente mayores a 0. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno estandar en \mathbb{C}^n . Demuestre que A induce un producto interno en \mathbb{C}^n a través de

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Hint. Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $A = C^{-1}DC$ y use esto para calcular A^n .

8. Considere la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6. \tag{1}$$

- 1 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.
- 4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática (1) de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.
- 2 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación (1). Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

9. Considere la ecuación

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 = 15. \tag{2}$$

- 1 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.
- 4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática (2) de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.
- 2 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación (2). Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.