Álgebra lineal

Taller 13

Representación matricial de transformaciones lineales.
Bases ortonormales.

Fecha de entrega: 14 de noviembre de 2025

1. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $E : 2x - y + z = 0$. Sea Q la proyección ortogonal sobre E.

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de Q (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

1 pts. (b) Encuentre el kernel de Q y dé una interpretación geométrica.

1 pts. (c) Encuentre la imagen de Q y dé una interpretación geométrica.

Sugerencia: Primero encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecta a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una reprsentación matricial con respecto a la base canónica.

Alternativamente puede usar una base ortogonal para E y completarla a una base ortgonal para $\mathbb{R}^3$. Así es fácil calcular $Q\vec{x}$ para $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere el plano E en $\mathbb{R}^3$ dado por $x + y - 3z = 0$.

2 pts. (a) Encuentre una base ortonormal para E.

2 pts. (b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

2 pts. (c) Escriba el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de la base encontrada en el literal anterior.

3. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

1 pts. (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal para U. Diga si su base encontrada es una base ortogonal.

1 pts. (b) Encuentre la dimensión de U y la dimensión de su complemento ortogonal.

4. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

2 pts. (a) Sea $P(0, 2, 5)$. Encuentre el punto $Q \in U$ que esté más cercano a P y calcule la distancia entre P y Q.

1 pts. (b) ¿Hay un punto $R \in U$ que esté a una distancia máximal de P?

5. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

2 pts. (a) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

3 pts. (b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal para U. (El proceso de Gram-Schmidt introduremos en la clase del martes. Si ya se quieren adelantar: está en la página 288-290 en las notas de clase.)

(c) **Voluntario:** Encuentre una base para $U^{\perp}$.

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean B, C, D y S las transformaciones lineales del Ejercicio 4 del Taller 10. Represéntelas como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.

7. Sea $W = \text{gen}\{(1,1,1,1)^t,\ (2,1,1,0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (a) Encuentre una base ortogonal para W.
   (b) Sean $A_1(1,2,0,1)$, $A_2(11,4,4,-3)$, $A_3(0,-1,-1,0)$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Para cada $j = 1,2,3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j.
   (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

8. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientesy encuentre una base ortonormal para $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

9. Encuentre una base ortonormal para $U^\perp$ donde $U = \text{gen}\{(1,0,2,4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

10. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.
    (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.
    (b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.
    (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.
    (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

11. Sean $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \text{gen}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

12. (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/16} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?
    (b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?
    (c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

13. En $\mathbb{R}^2$ considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea P la proyección ortogonal sobre L.

(a) Encuentre la representación matricial de P (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$).

(b) Encuentre el kernel de P y dé una interpretación geométrica.

(c) Encuentre la imagen de P y dé una interpretación geométrica.