Álgebra lineal

Taller 6

Matrices inversas; matrices transpuestas. Fecha de entrega: 19 de septiembre de 2025

---

8 pts. **1.** (a) Sean $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ que obtenemos al rotar $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ por $\pi/3$.

(b) Encuentre la matriz $R \in M(2 \times 2)$ que representa rotación por $\pi/3$.
Hint. Recordar Taller 5, Ejercicio 1.

(c) Encuentre la matriz $P \in M(2 \times 2)$ que representa proyección sobre el eje y.
Hint. Usar un procedimiento análogo a (a) y (b).

(d) Calcule RP y PR.

(e) Tome un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ y haga gráficas de $\vec{w}$, $P\vec{w}$ y $RP\vec{w}$ y de $\vec{w}$, $R\vec{w}$ y $PR\vec{w}$ y explica porque esto ayuda a entender por qué en general la mulitplicación de matrices no es conmutativa.

8 pts. **2.** Para las incógnitas x, y y a, b consideramos los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$2x + 3y = a, \qquad 5x - 2y = b \tag{1}$$

y

$$7a - 4b = 6, \qquad 3a - 2b = 5. \tag{2}$$

(a) Escriba ambos sistemas en forma matricial.

(b) Use (a) para encontrar el sistema lineal para x, y que no contiene a las incógnitas a, b.

(c) Use (a) para encontrar el sistema lineal para a, b que no contiene a las incógnitas x, y.

(d) Encuentre a, b, x, y.

2 pts. **3.** Escoja cuatro de las siguientes afirmaciones y diga si son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.[1]

(a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es símetrica.

(b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es símetrica.

(c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

(d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es símetrica.

(e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

(f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es símetrica.

(g) $AA^t = A^tA$ para toda matriz $A \in M(n \times n)$.

1 pts. **4.** (a) Sea $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

1 pts. (b) Demuestre que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una matriz anti-

---

[1] Puede usar las siguientes propiedades: $(A + cB)^t = A^T + cB^t$, $(A^t)^t = A$, $(AB)^t = B^tA^t$.

simétrica. (Es decir: Si $A \in M(n \times n)$, entonces existen matrices $B, C \in M(n \times n)$ tal que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.)

Ejercicios voluntarios[2]

5. Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \qquad \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

6. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.

(b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

7. Sea $A \in M(m \times n)$.

(a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

(b) Sea $B \in M(n \times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.

(c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x}\rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

8. Inversa de una matriz a bloques. Sean A, B, C, D matrices $n \times n$ y suponga que A es invertible. Consideramos la matriz a bloques

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

.

(a) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

(b) Demuestre que $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ son invertibles y encuentre sus inversas.

(c) Demuestre que, bajo la hipótesis que A es invertible, la matrix $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $D - CA^{-1}B$ lo es. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1}\left\{A + B[D - CA^{-1}B]^{-1}C\right\}A^{-1} & -A^{-1}B[D - CA^{-1}B]^{-1} \\ -[D - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & [D - CA^{-1}B]^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[2] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(d) Verifique que para el caso cuando A, B, C, D son números coincide con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(e) ¿Cómo serían la fórmulas si asumimos que D es invertible?