

Álgebra lineal

Taller 4

Proceso de eliminación de Gauß y Gauß-Jordan.

Fecha de entrega: 05 de septiembre de 2025

2 pts.

1. (a) En una panadería hay café, té, palito de queso y brownie. El primer cliente compra un café, un brownie y dos palitos de queso. Paga 12.000 pesos. El segundo cliente compra un té, un café y dos brownies. Paga 11.500 pesos. Después entran dos grupos de personas. El primer grupo pide 3 cafés, 4 té, 3 palitos de queso y 5 brownies. En total pagan 42.000 pesos. El otro grupo pide 5 cafés, un té, 4 palitos de queso y 3 brownies y paga 37.000 pesos.

¿Cuánto cuestan los productos café, té, palito de queso y brownie en la panadería?

2 pts.

- (b) En un café un cliente pide dos espresos y 1 muffin y paga 7 euros. Un grupo de amigos pide 5 espresos y 6 muffins. Otro grupo pide 3 espresos y 4 muffins y paga 10 euros menos que el primer grupo. Determine cuánto cuestan el espreso y el muffin.

8 pts.

2. Use la eliminación de Gauß o Gauß-Jordan para encontrar todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 7, \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ & 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 28, \\ & x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & 2x_1 + 3x_2 = 13, \\ & x_1 - 2x_2 = -4, \\ & 4x_1 + 5x_2 = 23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = -9, \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 19. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad & 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -13, \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 21, \\ & 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 13. \end{aligned}$$

2 pts.

3. (a) Encuentre un polinomio P de grado 3 con

$$P(1) = 2, \quad P(-1) = 6, \quad P'(1) = 8, \quad P(0) + 4P'(0) = 0.$$

1 pts.

- (b) ¿Existe un polinomio de grado 2 que satisface lo de arriba? De ser así, ¿cuántos hay? Justifique su respuesta.

1 pts.

- (c) ¿Existe un polinomio de grado 4 que satisface lo de arriba? De ser así, ¿cuántos hay? Justifique su respuesta.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Responda a las siguientes preguntas

y justifique su respuesta.

2 pts.

- (a) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts.

- (b) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ con $x_1 = 2$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts.

- (c) ¿Cuántos $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ existen tal que la primera componente de $A\vec{x}$ sea igual a 3?

Ejercicios voluntarios¹

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

6. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.
- (b) Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \parallel \vec{x}$. Para cada tal $\vec{x}$, encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.