

Álgebra lineal

Taller 3

Producto cruz; planos y rectas en $\mathbb{R}^3$.

Fecha de entrega: 29 de agosto de 2025

1 pts.

1. (a) Calcule el área del triángulo con los vértices adyacentes $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(-1, 2, -5)$.

1 pts.

- (b) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

- (c) Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ los vectores del literal (b). ¿Cuántos vectores $\vec{a}$ con norma 7 hay tal que el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ sea 24? Diga geoméricamente cómo se encuentran todos los $\vec{a}$ con esta propiedad y calcule dos de ellos.

4 pts.

2. Dados líneas L_1 y L_2 y el punto P , determine:

- si L_1 y L_2 son paralelas,
- si L_1 y L_2 tienen un punto de intersección,
- si P pertenece a L_1 y/o a L_2 ,
- una recta paralela a L_2 que pase por P .

(a) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad P(5, 2, 11).$

(b) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L_2 : x = t + 1, y = 3t - 4, z = -t + 2, \quad P(5, 7, 2).$

3. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

1 pts.

- (a) Encuentre por lo menos tres puntos que pertenecen a E y encuentre tres puntos que **no** pertenecen a E .

1 pts.

- (b) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ paralelos a E y no paralelos entre si.

1 pts.

- (c) Encuentre un punto en E y un vector $\vec{n}$ que es ortogonal a E .

1 pts.

- (d) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ paralelos a E con $\vec{a} \perp \vec{b}$.

¡Pruebe todas sus respuestas!

4 pts.

4. Para los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 0, -1)$ y los siguientes planos E :

- Encuentre la ecuación del plano.
- Determine si P pertenece al plano.
- Encuentre una recta que esté ortogonal a E y que contenga al punto Q .
- Encuentre una recta que esté paralela a E y que contenga al punto Q .

(i) E es el plano que contiene al punto $A(1, 0, 1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) E es el plano que contiene el punto $A(1, 0, 1)$ y es ortogonal al vector $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Considere el plano $E : 2x - y + 3z = 9$ y la recta $L : x = 3t + 1, y = -2t + 3, z = 5t$.

1 pts.

(a) Encuentre $E \cap L$.

1 pts.

(b) Encuentre una recta G que no interseque ni al plano E ni a la recta L . Pruebe su afirmación. ¿Cuántas rectas con esta propiedad hay?

2 pts.

(c) Encuentre un plano F que pase por los puntos $P(2, -5, 0)$ y $Q(0, 0, 3)$ y no es paralelo a E . ¿Cuántos planos con esta propiedad hay? ¿Se puede decir qué es $E \cap F$?

Ejercicios voluntarios¹

6. (a) Demuestre que no existe un elemento neutral para el producto cruz en $\mathbb{R}^3$. Es decir: Demuestre que no existe ningún vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w}$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(i) Encuentre todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(ii) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$.

7. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

(a) Demuestre que los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son paralelos al plano E .

(b) Encuentre números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{v}$.

(c) Demuestre que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es paralelo al plano E y encuentre vectores $c_{\parallel}$ y $c_{\perp}$ tal que $c_{\parallel}$ es paralelo a E , $c_{\perp}$ es ortogonal a E y $c = c_{\parallel} + c_{\perp}$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.