

Álgebra lineal

Taller 14

Bases ortogonales; valores y vectores propios.

Fecha de entrega: 15 de mayo de 2025

1. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y sea $U = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2 pts.

(a) Encuentre una base para el complemento ortogonal para U . Diga si su base encontrada es una base ortogonal.

2 pts.

(b) Encuentre la dimensión de U y la dimensión de su complemento ortogonal.

2. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

2 pts.

(a) Sea $P(0, 2, 5)$. Encuentre el punto $Q \in U$ que esté más cercano a P y calcule la distancia entre P y Q .

1 pts.

(b) ¿Hay un punto $R \in U$ que esté a una distancia máxima de P ?

3. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y sea $U = \text{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

2 pts.

(a) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

3 pts.

(b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal para U . (El proceso de Gram-Schmidt introduciremos en la clase del lunes. Si ya se quieren adelantar: está en la página 288-290 en las notas de clase.)

(c) **Voluntario:** Encuentre una base para $U^\perp$.

2 pts.

4. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. ¿Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

2 pts.

5. Sea $Q \in M(n \times n)$ una matriz ortogonal. Demuestre que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Concluya que

2 pts.

(a) Q no cambia magnitudes de vectores, es decir que $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

2 pts.

(b) Q no cambia ángulos entre vectores, es decir que $\angle(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicios voluntarios¹

6. Sea $W = \text{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t, (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
- (a) Encuentre una base ortogonal para W .
 - (b) Sean $A_1(1, 2, 0, 1)$, $A_2(11, 4, 4, -3)$, $A_3(0, -1, -1, 0)$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j .
 - (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estándar).
7. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal para $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
8. Encuentre una base ortonormal para $U^\perp$ donde $U = \text{gen}\{(1, 0, 2, 4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
9. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.
- (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.
 - (b) Demuestre que $\dim U + \dim W = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.
 - (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim W$.
 - (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.
10. (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/16} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?
- (b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?
- (c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?
11. En $\mathbb{R}^2$ considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea P la proyección ortogonal sobre L .
- (a) Encuentre la representación matricial de P (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$).
 - (b) Encuentre el kernel de P y dé una interpretación geométrica.
 - (c) Encuentre la imagen de P y dé una interpretación geométrica.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

12. Encuentre los valores propios y los espacios propios de las siguientes matrices $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix},$$

13. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.
- (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.
- (c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

14. Sea $Q \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Demuestre que es de la forma $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ o $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ para un $\varphi \in \mathbb{R}$.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

- (I) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$, (Linealidad en la primera componente)
- (II) $\langle x, z \rangle = \overline{\langle z, x \rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)
- (III) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- (IV) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe que

- (i) y (iii) implican $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
- (ii) implica que $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x es *ortogonal* a y si y solo si $\langle x, y \rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

Ejemplos. El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercicio 2.

Definición. Sea $A \in M(n \times n)$. Entonces la *matriz adjunta* es aquella que conseguimos de A al transponerla y conjugar sus entradas (como números complejos).

Ejemplos. $\begin{pmatrix} 3 + i & 5 - 4i \\ 8 & 9i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 - i & 8 \\ 5 + 4i & -9i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 + 2i & 3 + 4i \\ 5 + 6i & 7 + 8i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 - 2i & 5 - 6i \\ 3 - 4i & 7 - 8i \end{pmatrix}.$

Ejercicios.

1. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

- (b) Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

2. (a) Sea V el espacio de todas las funciones continuas $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{para } f, g \in V. \quad (1)$$

- (b) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1, \quad v_n(x) = \sin(n\pi x), \quad w_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en $C[0, 1]$ con el producto interno definido en (1).

- (c) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$, $p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el producto interno definido en (1).

Observación. Salvo constantes multiplicativos, el polinomio q_j es el *polinomio j -ésimo de Legendre*.

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \rightarrow V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en $\mathbb{R}^n$.
- Reflexiones en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.

- (a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).
- (b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Un *grupo* es un conjunto no-vacío G junto con una operación $G \times G \rightarrow G$ tal que:

- (I) *Existencia de un elemento neutro:* existe un $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.
- (II) *Existencia de inversos:* para todo $g \in G$ existe un $\tilde{g} \in G$ tal que $g\tilde{g} = \tilde{g}g = e$.
- (III) *Asociatividad:* para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $(gh)k = g(hk)$.

El grupo G se llama *conmutativo* si además $gh = hg$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplos.

- (I) $\mathbb{Z}$ con la suma;
- (II) $\mathbb{Q}$ con la suma;
- (III) $\mathbb{R}$ con la suma;
- (IV) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con el producto;
- (V) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto;
- (VI) funciones $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la suma;
- (VII) $M(n \times n)$ con la suma;
- (VIII) cada espacio vectorial con su suma;
- (IX) funciones biyectivas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la composición;
- (X) $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$ con producto;
- (XI) funciones lineales biyectivas $V \rightarrow V$ con la composición donde V es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)–(xi) son no-conmutativos para $n \geq 2$.

Ejercicios.

1. Demuestre que los ejemplos arriba son grupos.
2. Sean $O(n) = \{Q \in M(n \times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$ y $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$.
 - (a) Demuestre que $O(n)$ con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:
 - (I) Para todo $Q, R \in O(n)$, la composición QR es un elemento en $O(n)$.
 - (II) Existe un $E \in O(n)$ tal que $QE = Q$ y $EQ = Q$ para todo $Q \in O(n)$.
 - (III) Para todo $Q \in O(n)$ existe un elemento inverso $\tilde{Q}$ tal que $\tilde{Q}Q = Q\tilde{Q} = E$.
 - (b) ¿Es $O(n)$ conmutativo (es decir, se tiene $QR = RQ$ para todo $Q, R \in O(n)$)?
 - (c) Demuestre que $SO(n)$ con la composición es un grupo.