Álgebra lineal

Taller 13

Representación matricial de transformaciones lineales.
Bases ortonormales.

Fecha de entrega: 08 de mayo de 2025

3 pts. **1.** Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

(a) Demuestre qu $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y $\vec{x}$ (en la representación estandar).

(c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y $\vec{y}$ (en la representación estandar).

1 pts. **2.** (a) Demuestre que la siguente función es lineal:

$$\Phi : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), \qquad \Phi(A) = A^t$$

1 pts. (b) Sea $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estandar[1] de $M(2 \times 2)$. Encuentre la matriz que representa a Φ con respecto a esta base.

2 pts. (c) Sean $R = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$. Demuestre que $\mathcal{C}$ es una base de $M(2 \times 2)$ y escriba Φ como matriz con respecto a esta base.

1 pts. **3.** (a) Demuestre que $T : P_3 \to P_3,\ Tp = p'$ es una función lineal.

1 pts. (b) Determine $\ker(T),\ \operatorname{Im}(T),\ \dim(\ker(T)),\ \dim(\operatorname{Im}(T))$.

1 pts. (c) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base estandar de P_3. Encuentre la matriz que representa a T con respecto a esta base.

1 pts. (d) Sean $q_1 = X+1,\ q_2 = X-1,\ q_3 = X^2+X,\ q_4 = X^3+1$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es una base de P_3. .

2 pts. (e) Encuentre la matriz que representa a T con respecto a la base $\mathcal{C}$.

4. Considere el plano E en $\mathbb{R}^3$ dado por $x + y - 3z = 0$.

1 pts. (a) Encuentre una base ortonormal para E, es decir una base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ para E tal que $\vec{v} \perp \vec{w}$.

1 pts. (b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, es decir, encuentre un vector $\vec{a}$ tal que $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$ y ademá $\vec{a} \perp \vec{w}$, $\vec{a} \perp \vec{w}$ (con los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como en el literal anterior).

1 pts. (c) Escriba el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ como combinación lineal de la base encontrada en el literal anterior.

5. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $E : 2x - y + z = 0$. Sea Q la proyección ortogonal sobre E.

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de Q (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

1 pts. (b) Encuentre el kernel de Q y dé una interpretación geométrica.

1 pts. (c) Encuentre la imagen de Q y dé una interpretación geométrica.

Sugerencia: Primero encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecta a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una reprsentación matricial con respecto a la base canónica.

Alternativamente puede usar una base ortogonal para E y completarla a una base ortgonal para $\mathbb{R}^3$. Así es fácil calcular $Q\vec{x}$ para $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicios voluntarios[2]

---

6. Represente las transformaciones lineales del Ejercicio 1 del Taller 11 como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.

7. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (dados en coordenadas cartesianas).

(a) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(b) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(c) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(d) ¿Existen $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$ tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

---

[1] $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[2] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.