Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 12

Transformaciones lineales. Bases.

Fecha de entrega: 02 de mayo de 2024

---

2 pts. **1.** (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3.

2 pts. (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \to P_k$ para $k \in \mathbb{N},\ k \neq 3$?

2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.

1 pts. (a) ¿Cuáles son las posibles dimensiones de $\ker A$ y $\operatorname{Im} A$?

1 pts. (b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0,\ \dim(\ker A_1) = 1, \dots$. Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

3. Sean

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3 pts. (a) Encuentre una base y la dimensión de $W := \operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\}$.

2 pts. (b) Diga si $\vec{b} \in W$ y $\vec{c} \in W$.

1 pts. (c) Sea $A \in M(4 \times 4)$ la matriz cuyas columnas son los vectores $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4$. ¿Cuál es la relación entre W e $\operatorname{Im} A$?

2 pts. (d) Utilizando sus resultados anteriores, diga si los sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$ y $A\vec{x} = \vec{c}$ son consistentes. Si lo son, diga cuántas soluciones hay. Justifique sus respuestas (no es necesario encontrar las soluciones).

3 pts. **4.** Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Escriba los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ como combinaciones lineales de la base $\mathcal{B}$.

3 pts. **5.** Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las siguientes matrices como combinaciones lineales de los elementos de la base.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$