

Álgebra lineal

8 pts.

1. Escoja 4 de los siguientes literales y determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel.

(a) $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(b) $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2 \times 2)$, $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(c) $C : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$, $C(M) = M + M^t$

(d) $D : P_3 \rightarrow P_4$, $Dp = p' + xp$,

(e) $R : P_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Rp = \int_0^1 p(t) dt$,

(f) $S : P_3 \rightarrow M(2 \times 3)$, $S(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 3 \end{pmatrix}$.

(g) $T : P_3 \rightarrow M(2 \times 3)$, $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 0 \end{pmatrix}$,

6 pts.

2. De las siguientes matrices, encuentre una base para su kernel y la dimensión y encuentre una base para su imagen y la dimensión.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

1 pts.

3. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es biyectivo. Demuestre que $m = n$.

4. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

- (a) Demuestre que E y F son invertibles. Describa cómo actúan geoméricamente en \mathbb{R}^2 .

1 pts.

- (b) Calcule $\text{Im}(A)$, $\ker(A)$ y sus dimensiones. Dibuje $\text{Im}(A)$ y $\ker(A)$, diga qué objetos geométricos son.

1 pts.

- (c) Calcule $\text{Im}(A)$, $\text{Im}(FA)$, $\text{Im}(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuál es la relación entre ellos.

1 pts.

- (d) Calcule $\ker(A)$, $\ker(FA)$, $\ker(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuál es la relación entre ellos.

Ejercicios voluntarios¹

5. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

(i) A inyectiva $\implies m \geq n$.

(ii) A sobreyectiva $\implies n \geq m$.

Demuestre que la implicación " \Leftarrow " en (i) and (ii) en general es falsa.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.