

Álgebra lineal

3 pts.

1. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

1 pts.

2. Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

4 pts.

3. Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

3 pts.

4. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la siguiente lista escoja 6 numerales y diga si o no son subespacios de $M(m \times n)$. Pruebe su afirmación.

- (I) Todas matrices con $a_{11} = 0$.
- (II) Todas matrices con $a_{11} = 3$.
- (III) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.
- (IV) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que $m = n$.

- (V) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$).
- (VI) Todas las matrices que no son simétricas.
- (VII) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$).
- (VIII) Todas las matrices diagonales.
- (IX) Todas las matrices triangular superior.
- (X) Todas las matrices triangular inferior.
- (XI) Todas las matrices invertibles.
- (XII) Todas las matrices no invertibles.
- (XIII) Todas las matrices con $\det A = 1$.

5. Considere los sistemas de ecuaciones lineales

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{array} \right\}, \quad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 3 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \\ 7x + 8y + 9z = 15 \end{array} \right\}.$$

Sea U el conjunto de todas las soluciones de (1) y W el conjunto de todas las soluciones de (2). Note que se pueden ver como subconjuntos de \mathbb{R}^3 .

3 pts.

(a) Demuestre que U es un subespacio de \mathbb{R}^3 y descríballo geoméricamente.

1 pts.

(b) Demuestre que W no es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

3 pts.

(c) Demuestre que W es un subespacio afín de \mathbb{R}^3 y descríballo geoméricamente.

Ejercicios voluntarios¹

6. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. Sea U un subespacio de \mathbb{R}^n . Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de \mathbb{R}^n .

8. (a) Considere el conjunto \mathbb{R}^2 con las siguientes operaciones:

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es \mathbb{R}^2 con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

(b) Considere el conjunto \mathbb{R}^2 con las siguientes operaciones:

$$\boxplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \lambda \boxdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es \mathbb{R}^2 con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

9. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.

(a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^m .

(b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n .

(c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$ son subespacios de \mathbb{R}^n ?

(d) Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ fijo. ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^k ?

(e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de \mathbb{R}^k ?

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.