

Álgebra lineal

- 2 pts. 1. (a) Encuentre $(S_j(c))^{-1}, (Q_{ij}(c))^{-1}, (P_{ij})^{-1}$.
 (b) Encuentre $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

- 8 pts. 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$
 (a) Escriba A, A^{-1} y A^t como producto de matrices elementales.
 (b) Use el resultado de (a) para encontrar A^{-1} .

- 5 pts. 3. Para las siguientes matrices encuentre matrices elementales E_1, \dots, E_n tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 5 pts. 4. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios voluntarios¹

5. (a) Sea $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales en forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.
 (b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.

6. El objetivo de este ejercicio es entender qué pasa con una matriz dada si la multiplicamos desde el lado derecho con una matriz elemental.

Sea $A \in M(m \times n)$ y sea E una matriz elemental.

- (a) Demuestre que $(AE)^t = FA^t$ donde F es una matriz elemental. Diga cuál matriz es F (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c), Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

- (b) Use que $AE = ((AE)^t)^t$ y su resultado de (a) para describir en palabras como cambia A si la multiplicamos por el lado derecho con E (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c)$, $Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).