

Álgebra lineal

Taller 6

Matrices inversas; matrices elementales.

Fecha de entrega: 06 de marzo de 2025

5 pts.

1. (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n)$ y sea $\vec{e}_k$ el k -ésimo vector unitario en $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya k -ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule $A\vec{e}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A .
- (b) Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).
- (c) Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.
- (d) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{v} = \vec{0}$.
- (e) Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

2 pts.

2. Sea $A \in M(n \times n)$ una matriz invertible. Denotamos las columnas de A por $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n$ y sus filas por $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n$. Además denotamos las columnas de A^{-1} por $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ y sus filas por $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$.
- (a) Demuestre que todo vector $\vec{f}_j$ es ortogonal a todo vector $\vec{x}_k$ con $k \neq j$.
- (b) ¿Qué sería la afirmación análoga sobre los vectores $\vec{c}_j$?

En los siguientes ejercicios se usa la transpuesta A^t de una matriz A . Veremos qué es en la clase del lunes.

4 pts.

3. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.

5 pts.

4. Escoja cinco de las siguientes afirmaciones y diga si son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.
 - (a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es simétrica.
 - (b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es simétrica.
 - (c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
 - (d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es simétrica.
 - (e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
 - (f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es simétrica.
 - (g) $AA^t = A^tA$ para toda matriz $A \in M(n \times n)$.

2 pts.

5. (a) Sea $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

2 pts.

- (b) Demuestre que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (Es decir: Si $A \in M(n \times n)$, entonces existen matrices $B, C \in M(n \times n)$ tal que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.)

Ejercicios voluntarios¹

6. Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

7. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.

(b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

8. Sea $A \in M(m \times n)$.

(a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$.

(b) Sea $B \in M(n \times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.

(c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

9. **Inversa de una matriz a bloques.** Sean A, B, C, D matrices $n \times n$ y suponga que A es invertible. Consideramos la matriz a bloques

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

(b) Demuestre que $\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \text{id} & A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}$ son invertibles y encuentre sus inversas.

(c) Demuestre que, bajo la hipótesis que A es invertible, la matrix $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $D - CA^{-1}B$ lo es. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \text{id} & A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \text{id} & -A^{-1}B \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -CA^{-1} & \text{id} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} \{A + B[D - CA^{-1}B]^{-1}C\} A^{-1} & -A^{-1}B[D - CA^{-1}B]^{-1} \\ -[D - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & [D - CA^{-1}B]^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Verifique que para el caso cuando A, B, C, D son números coincide con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(e) ¿Cómo serían la fórmulas si asumimos que D es invertible?

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.