Álgebra lineal

Taller 5

Matrices y vectores. Fecha de entrega: 27 de febrero de 2025

---

1 pts. **1.** (a) Encuentre un polinomio P de grado 3 con

$$P(1) = 2, \quad P(-1) = 6, \quad P'(1) = 8, \quad P(0) + 4P'(0) = 0.$$

1 pts. (b) ¿Existe un polinomio de grado 2 que satisface lo de arriba? De ser así, ¿cuántos hay? Justifique su respuesta.

1 pts. (c) ¿Existe un polinomio de grado 4 que satisface lo de arriba De ser así, ¿cuántos hay? Justifique su respuesta.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Responda a las siguientes preguntas y justifique su respuesta.

1 pts. (a) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts. (b) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ con $x_1 = 2$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts. (c) ¿Cuántos $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ existen tal que la primera componente de $A\vec{x}$ sea igual a 3?

2 pts. **3.** (a) Calcule la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2 pts. (b) Use el resultado del literal anterior para encontrar una vector $\vec{x}$ y matrices B, C, D tal que

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:
Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

1 pts. (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que siginifican los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

1 pts. (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuántos chocolates y cuántas mentas contienen:

(i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B, (ii) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B.

2 pts. (c) Determine si es posible conseguir

(i) 5 chocolates y 15 mentas,
(ii) 2 chocolates y 11 mentas,
(iii) 21 chocolates y 23 mentas,
(iv) 14 chocolates y 19 mentas.

comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

6 pts. **5.** De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

7. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.

   (b) Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \| \vec{x}$. Para cada tal $\vec{x}$, encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

8. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

   (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene exactamente una solución para $\vec{x}$.

   (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene infinitas soluciones para $\vec{x}$.

   (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene ninguna solución para $\vec{x}$.

   (d) Haga lo mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$.

   (e) Haga los mismo para $A_k\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$ donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 pts. 9. (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{e}_1$ a $\vec{v}$ y el vector $\vec{e}_2$ a $\vec{w}$.

   (ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{v}$ a $\vec{e}_1$ y el vector $\vec{w}$ a $\vec{e}_2$.

   (b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.