Álgebra lineal

Taller 3

Prodcto cruz; planos y rectas en $\mathbb{R}^3$. Fecha de entrega: 13 de febrero de 2025

---

2 pts.

1. Para los siguientes vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

   (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix},$ (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$

5 pts.

2. (a) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix},$ (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix},$ (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}.$

   (b) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix},$ (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}.$

3 pts.

3. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcule $\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$.

   (b) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\| \operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 0$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

   (c) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\| \operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 2$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

4 pts.

4. Dados líneas L_1 y L_2 y el punto P, determine:

   - si L_1 y L_2 son paralelas,
   - si L_1 y L_2 tienen un punto de intersección (lo aprendemos en la clase el lunes),
   - si P pertenece a L_1 y/o a L_2,
   - una recta paralela a L_2 que pase por P.

   (a) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$ $L_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4},$ $P(5, 2, 11)$.

   (b) $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$ $L_2 : x = t + 1, \ y = 3t - 4, \ z = -t + 2,$ $P(5, 7, 2)$.

5. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \ : \ s, t \in \mathbb{R} \right\}$

   2 pts. (a) Encuentre por lo menos tres puntos distintos que pertenecen a E y encuentre tres puntos que **no** pertenecen a E.

   1 pts. (b) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ paralelos a E y no paralelos entre si.

   1 pts. (c) Encuentre un punto en E y un vector $\vec{n}$ que es ortogonal a E.

   2 pts. (d) Encuentre un punto en E y dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ paralelos a E con $\vec{a} \perp \vec{b}$.

¡Pruebe todas sus respuestas!

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.

(a) Demustre que $\|\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{a}\|$.

(b) Encuentre condiciones para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $\|\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| = \|\vec{a}\|$.

(c) ¿Es cierto que $\|\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{b}\|$?

7. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano E dado por $E : 3x - 2y + 4z = 16$.

(a) Demuestre que los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son paralelos al plano E.

(b) Encuentre números $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{v}$.

(c) Demuestre que el vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ no es paralelo al plano E y encuentre vectores $c_{\parallel}$ y $c_{\perp}$ tal que $c_{\parallel}$ es paralelo a E, $c_{\perp}$ es ortogonal a E y $c = c_{\parallel} + c_{\perp}$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.