Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 2

Espacios vectoriales; vectores en $\mathbb{R}^2$.

Fecha de entrega: 06 de febrero de 2024

---

0. Recuerda escribir el número del grupo y los nombres de todos los integrantes bien visible y legible en la primera hoja de la entrega e indicar claramente si un integrante no aportó a la elaboración de la solución. Si estos datos faltan, el taller no será calificado y tendrá la nota 0.

3 pts.

1. (a) Encuentre todos los números k tal que el siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución y calcule esta solución.

$$kx + 5y = 0, \qquad 3x + (2 + k)y = 0.$$

Qué pasa para los otros k?

3 pts.

(b) Haga lo mismo para el sistema

$$kx + 5y = 5, \qquad 3x + (2 + k)y = -3.$$

1 pts.

2. Encuentre todos los k tales que las siguientes rectas se intersecan en exactamente un punto.

$$3x - (k + 2)y = 3\ln(2), \qquad (k - 1)x + 5ky = \sqrt{7 - \pi}.$$

3 pts.

3. Encuentre todos los k tales que las siguientes rectas **no** se intersecan en exactamente un punto. ¿Cuántas intersecciones hay para cada uno de estos k?

$$(k + 1)x + 3y = \sqrt{7 - \pi}, \qquad 4x + (k - 3)y = -2\sqrt{7 - \pi}.$$

5 pts.

4. De todos los siguientes conjuntos diga si es un espacio vectorial con su suma y producto usual y justifique su respuesta bien.

(a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.

5 pts.

5. Sean $P(2, 3)$, $Q(-1, 4)$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcule y grafique $\overrightarrow{PQ}$, $\|\overrightarrow{PQ}\|$, $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$, $\overrightarrow{PQ} - \vec{v}$.

(b) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de $\vec{v}$.

(c) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que son paralelos a $\vec{v}$.

(d) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que $\vec{v}$ y que tienen el doble de la longitud de $\vec{v}$.

(e) (Después de la clase del lunes.)
Encuentre todos los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$.
Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a $\vec{v}$.

Ejercicios voluntarios[1]

6. Repita el ejercicio 1 pero con el sistema

- $kx + 2y = 0,\ 2x - (3 + k)y = 0$ en el literal (a) y
- $kx + 2y = 6,\ 2x - (3 + k)y = -3$ en el literal (b).

Recuerde que un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ es un conjunto V con una *suma* $u + v \in V$ para $u, v \in V$ y un *producto* $\lambda v \in V$ para $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

(I) *asociatividad*: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$,
(II) *conmutatividad*: $u + v = v + v$ para todo $u, v \in V$,
(III) *elemento neutral*: Existe un $\mathbb{O} \in V$ tal que $\mathbb{O} + v = v$ para todo $v \in V$,
(IV) *inverso aditivo*: Para todo $v \in V$ existe un elemento $\widetilde{v} \in V$ tal que $v + \widetilde{v} = \mathbb{O}$,
(V) $1v = v$.
(VI) *compatibilidad*: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,
(VII) *distributividad*: $\lambda(v + u) = \lambda u + \lambda v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$,
$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

7. Demuestre lo siguiente:

(a) El elemento neutral es único.
(b) $0v = \mathbb{O}$ para todo $v \in V$.
(c) $\lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
(d) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ es único.
(e) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ cumple $\widetilde{v} = (-1)v$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.