Álgebra lineal

Taller 15

Valores y vectores propios; diagonalización. Fecha de entrega: 28 de noviembre de 2024

---

4 pts. **1.** Dados la matriz A y los vectores u y w:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -18 \\ -30 & -20 & 36 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Diga si los vectores u y w son autovectores de A. Si lo son, cuáles son los valores propios correspondientes?

(b) Calcule todos los valores propios de A.

2 pts. **2.** (a) Encuentre los vectores y espacios propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2 pts. (b) ¿La matriz A es diagonalizables? Si lo es, encuentre matrices diagonales D y matrices invertibles S, T tal que

$$TAT^{-1} = D, \qquad S^{-1}AS = D.$$

1 pts. (c) ¿La matriz B es diagonalizables? Si lo es, encuentre matrices diagonales D y matrices invertibles S, T tal que

$$TBT^{-1} = D, \qquad S^{-1}BS = D.$$

6 pts. **3.** Para las siguientes matrices, encuentre los vectores propios, los espacios propios, una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $C^{-1}AC = D$. ¿La matriz C se puede elegir como matriz ortogonal?

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 pts. **4.** Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) ¿Existe una matriz $A \in M(3 \times 3)$ tal que $\vec{v}$ es vector propio con valor propio 5 y $\vec{w}$ es vector propio con valor propio 2?

(b) ¿Existe una matriz simétrica $A \in M(3 \times 3)$ tal que $\vec{v}$ es vector propio con valor propio 5 y $\vec{w}$ es vector propio con valor propio 2?

(c) ¿Existe una matriz simétrica $A \in M(3 \times 3)$ tal que $\vec{v}$ es vector propio con valor propio 5 y $\vec{w}$ es vector propio con valor propio 5?

En los tres casos debe encontrar una matriz que sirva o justificar por qué no existe.

2 pts.

5. Encuentre los valores propios, los espacios propios y el polinomio característico de la siguiente matriz $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Hint. Encuentre la dimensión del kernel de A. ¿Qué nos dice sobre el polinomio característico? Después mire la imagen.

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean B, C, D y S las transformaciones lineales del Ejercicio 1 del Taller 11. Represéntelas como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.

7. Encuentre los valores propios y los espacios propios de las siguientes matrices $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix},$$

8. (a) Sea $\Phi : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$, $\Phi(A) = A^t + A$. Encuentre los valores propios y los espacios propios de Φ.
   (b) Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grade menor o igual a 0 con coeficientes reales. Encuentre los valores propios y los espacios propios de $T : P_2 \to P_2, \quad Tp = p' + 3p$.
   (c) Sea R la reflexión en el plano $P : x + 2y + 3z = 0$ en $\mathbb{R}^3$. Calcule los valores propios y los espacios propios de R.

9. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matriz hermitiana tal que todos sus autovalores son estrictamente mayores a 0. Sea $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ el producto interno estandar en $\mathbb{C}^n$. Demuestre que A induce un producto interno en $\mathbb{C}^n$ a través de

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad (x, y) := \langle Ax\, , y \rangle.$$

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

    Hint. Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $A = C^{-1}DC$ y use esto para calcular A^n.

11. Considere la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6. \tag{1}$$

1 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.

4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática (1) de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.

2 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación (1). Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

12. Considere la ecuación

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 = 15. \tag{2}$$

1 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.

4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática (2) de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.

2 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación (2). Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : V\times V\to V$ tal que para todo $x,y,z\in V$ y $\lambda\in\mathbb{K}$:

(i) $\langle x+\lambda y\,,z\rangle = \langle x\,,z\rangle + \lambda\langle y\,,z\rangle$, (Linealidad en la primera componente)

(ii) $\langle x\,,z\rangle = \overline{\langle x\,,z\rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)

(I) $\langle x\,,x\rangle \geq 0$,

(iii) $\langle x\,,x\rangle = 0 \iff x=0$,

Observe que

- (i) y (iii) implican $\langle x\,,\lambda y+z\rangle = \overline{\lambda}\langle x\,,y\rangle + \langle x\,,z\rangle$,
- (ii) implica que $\langle x\,,x\rangle\in\mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ y sean $x,y\in V$. Entonces x *es ortogonal a* y si y solo si $\langle x\,,y\rangle=0$. Notación en este caso: $x\perp y$.

Ejemplos. El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercio 2.

Definición. Sea $A\in m(n\times n)$. Entonces la *matriz adjunta* es aquella que conseguimos de A al transponerla y conjugar sus entradas (como números complejos).

Ejemplos. $\begin{pmatrix}3+\imath & 5-4\imath\\ 8 & 9\imath\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}3-\imath & 8\\ 5+4\imath & -9\imath\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1+2\imath & 3+4\imath\\ 5+6\imath & 7+8\imath\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}1-2\imath & 5-6\imath\\ 3-4\imath & 7-8\imath\end{pmatrix}$.

Ejercicios.

1. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle\vec{x}\,,\vec{y}\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j}, \qquad \text{para } \vec{x}=(x_1,\dots,x_n)^t,\ \vec{y}=(y_1,\dots,y_n)^t\in\mathbb{C}^n.$$

(b) Sea $A\in M(n\times n,\mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax\,,y\rangle = \langle x\,,A^*y\rangle \qquad \text{para todo } \ x,y\in\mathbb{C}^n.$$

2. (a) Sea V el espacio de todas la funciones continuas $[0,1]\to\mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V:

$$\langle f\,,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{para } f,g\in V. \tag{3}$$

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(b) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1,\ v_n(x) = \sin(n\pi x),\ w_n(x) = \cos(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en $C[0,1]$ con el product interno definido en (3).

(c) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1,\ p_1 = x,\ p_2 = x^2,\ p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el product interno definido en (3).

Observación. Salvo constantes multiplicativos, el polinomio q_j es el *poliniomo j-ésimo de Legendre.*

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \to V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en $\mathbb{R}^n$.
- Reflexiones en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.

 (a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).

 (b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Un *grupo* es un conjunto no-vacío G junto con una operación $G \times G \to G$ tal que:

(I) *Existencia de un elemento neutro:* existe un $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.

(II) *Existencia de inversos:* para todo $g \in G$ existe un $\widetilde{g} \in G$ tal que $g\widetilde{g} = \widetilde{g}g = e$.

(III) *Asociatividad:* para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $(gh)k = g(hk)$.

El grupo G se llama *conmutativo* si además $gh = hg$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplos.

(I) $\mathbb{Z}$ con la suma;

(II) $\mathbb{Q}$ con la suma;

(III) $\mathbb{R}$ con la suma;

(IV) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con el producto;

(v) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto;

(vi) funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la suma;

(vii) $M(n \times n)$ con la suma;

(viii) cada espacio vectorial con su suma;

(ix) funciones biyectivas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la composición;

(x) $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$ con producto;

(xi) funciones lineales biyectivas $V \to V$ con la composición donde V es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)-(xi) son no-conmutativos para $n \geq 2$.

Ejercicios.

1. Demuestre que los ejemplos arriba son grupos.

2. Sean $O(n) = \{Q \in M(n \times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$ y $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$.

   (a) Demuestre que $O(n)$ con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:

      (i) Para todo $Q, R \in O(n)$, la composición QR es un elemento en $O(n)$.

      (ii) Existe un $E \in O(n)$ tal que $QE = Q$ y $EQ = Q$ para todo $Q \in O(n)$.

      (iii) Para todo $Q \in O(n)$ existe un elemento inverso $\widetilde{Q}$ tal que $\widetilde{Q}Q = Q\widetilde{Q} = E$.

   (b) ¿Es $O(n)$ conmutativo (es decir, se tiene $QR = RQ$ para todo $Q, R \in O(n)$)?

   (c) Demuestre que $SO(n)$ con la composición es un grupo.