Álgebra lineal

Taller 14

Representación matricial de transformaciones lineales. Fecha de entrega: 21 de noviembre de 2024

1 pts. **1.** (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3.

1 pts. (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \to P_k$ para $k \in \mathbb{N},\ k \neq 3$?

1 pts. **2.** (a) Demuestre que la siguente función es lineal:

$$\Phi : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), \qquad \Phi(A) = A^t$$

2 pts. (b) Sea $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estandar[1] de $M(2\times 2)$. Encuentre la matriz que representa a Φ con respecto a esta base.

2 pts. (c) Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$. Demuestre que $\mathcal{C}$ es una base de $M(2 \times 2)$ y escriba Φ como matriz con respecto a esta base.

1 pts. **3.** (a) Demuestre que $T : P_3 \to P_3,\ Tp = p'$ es una función lineal.

2 pts. (b) Determine $\ker(T),\ \operatorname{Im}(T),\ \dim(\ker(T)),\ \dim(\operatorname{Im}(T))$.

1 pts. (c) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base estandar de P_3. Encuentre la matriz que representa a T con respecto a esta base.

1 pts. (d) Sean $q_1 = X + 1,\ q_2 = X - 1,\ q_3 = X^2 + X,\ q_4 = X^3 + 1$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es una base de P_3. .

2 pts. (e) Encuentre la matriz que representa a T con respecto a la base $\mathcal{C}$.

1 pts. **4.** (a) Demuestre que

$$T : P_2 \to M(2 \times 2), \quad T(aX^2 + bX + c) = \begin{pmatrix} a + 2c & 2b - a - 2c \\ b & a + 2c \end{pmatrix}$$

es una función lineal.

2 pts. (b) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base estandar de P_2 y sea $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estandar de $M(2 \times 2)$. Encuentre la matriz A que representa a T con respecto a estas bases. Encuentre $\ker A$ e $\operatorname{Im} A$ y concluya quién es $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

3 pts. (c) Sea $\widetilde{\mathcal{B}} = \{X + 1,\ X - 1,\ X^2 + X\}$ y sea $\widetilde{\mathcal{C}} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ con

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede usar que $\widetilde{\mathcal{B}}$ es base para P_2 y que $\widetilde{\mathcal{C}}$ es base para $M(2 \times 2)$.

Encuentre la matriz $\widetilde{A}$ que representa a T con respecto a estas bases. Encuentre $\ker \widetilde{A}$ e $\operatorname{Im}\widetilde{A}$ y concluya quién es $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$. Compare con el resultado del literal anterior.

[1] $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.