Álgebra lineal

Taller 13

Bases ortonormales. Fecha de entrega: 14 de noviembre de 2024

1. Considere el plano E en $\mathbb{R}^3$ dado por $x + y - 3z = 0$.

2 pts. (a) Encuentre una base ortonormal para E.

2 pts. (b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

2 pts. (c) Escriba el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de la base encontrada en el literal anterior.

2. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $E : 2x - y + z = 0$. Sea Q la proyección ortogonal sobre E.

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de Q (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

1 pts. (b) Encuentre el kernel de Q y dé una interpretación geométrica.

1 pts. (c) Encuentre la imagen de Q y dé una interpretación geométrica.

Sugerencia: Primero encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecta a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una reprsentación matricial con respecto a la base canónica.

Alternativamente puede usar una base ortogonal para E y completarla a una base ortgonal para $\mathbb{R}^3$. Así es fácil calcular $Q\vec{x}$ para $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

3. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

2 pts. (a) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

3 pts. (b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal para U.

2 pts. (c) Encuentre una base para $U^\perp$.

1 pts. 4. Sea $Q \in M(n \times n)$ una matriz ortogonal. Demuestre que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\langle Q\vec{x}\,, Q\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}\,, \vec{y}\rangle.$$

Concluya que

1 pts. (a) Q no cambia magnitudes de vectores, es decir que $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

1 pts. (b) Q no cambia ángulos entre vectores, es decir que $\sphericalangle(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicios voluntarios[1]

5. Sea $W = \text{gen}\{(1,1,1,1)^t,\ (2,1,1,0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Encuentre una base ortogonal para W.

(b) Sean $A_1(1,2,0,1)$, $A_2(11,4,4,-3)$, $A_3(0,-1,-1,0)$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Para cada $j = 1,2,3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j.

(c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

6. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes y encuentre una base ortonormal para $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

7. Encuentre una base ortonormal para $U^\perp$ donde $U = \text{gen}\{(1,0,2,4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

8. En $\mathbb{R}^2$ considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea P la proyección ortogonal sobre L.

(a) Encuentre la representación matricial de P (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$).

(b) Encuentre el kernel de P y dé una interpretación geométrica.

(c) Encuentre la imagen de P y dé una interpretación geométrica.

9. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.

(c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

10. Sea $Q \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Demuestre que es de la forma $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ o $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ para un $\varphi \in \mathbb{R}$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.