Álgebra lineal

Taller 11

Kernels, imágenes de funciones lineales.

Fecha de entrega: 31 de octubre de 2024

---

2 pts.

1. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Escriba los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ como combinaciones lineales de la base $\mathcal{B}$.

2 pts.

2. Sean $R = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 7\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las siguientes matrices como combinaciones lineales de los elementos de la base.

$$K = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Sean

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

1 pts. (a) Demuestre que E y F son invertibles. Describa cómo actuan geométricamente en $\mathbb{R}^2$.

2 pts. (b) Calcule $\operatorname{Im}(A)$, $\ker(A)$ y sus dimensiones. Dibuja $\operatorname{Im}(A)$ y $\ker(A)$, diga qué objetos geométricos son.

2 pts. (c) Calcule $\operatorname{Im}(A)$, $\operatorname{Im}(FA)$, $\operatorname{Im}(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuál es la relación entre ellos.

2 pts. (d) Calcule $\ker(A)$, $\ker(FA)$, $\ker(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuál es la relación entre ellos.

9 pts.

4. De las siguientes matrices, encuentre una base para su kernel y la dimensión y encuentre una base para su imagen[1] y la dimensión.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 2\\2 & 5 & 8 & 4\\3 & 6 & 9 & 6\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 1\\3 & 2 & 13 & 1\\0 & 2 & 7 & -1\\4 & 5 & 25 & 1\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 9\end{pmatrix}.$$

Ejercicios voluntarios[2]

---

5. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

(I) A inyectiva $\Longrightarrow m \geq n$.

(II) A sobreyectiva $\Longrightarrow n \geq m$.

Demuestre que la implicación "$\Longleftarrow$" en (i) and (ii) en general es falsa.

---

[1] Vamos a ver el lunes un método para encontrar una base para la imagen.

[2] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.