# Álgebra lineal

Taller 8

Determinantes. Espacios vectoriales. Fecha de entrega: 10 de octubre de 2024

---

6 pts. **1.** De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 pts. **2.** Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

1 pts. **3.** Encuentre por lo menos cuatro matrices $3 \times 3$ cuyo determinante es 18.

3 pts. **4.** Calcule $\det B_n$ donde $B_n$ es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay $x$ en la diagonal?

3 pts. **5.** Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la siguiente lista escoja 6 numerales y diga si o no son subespacios de $M(m \times n)$. Pruebe su afirmación.

(i) Todas matrices con $a_{11} = 0$.
(ii) Todas matrices con $a_{11} = 3$.
(iii) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.
(iv) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que $m = n$.

(v) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices $A$ con $A^t = A$) .
(vi) Todas las matrices que no son simétricas.
(vii) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices $A$ con $A^t = -A$).
(viii) Todas las matrices diagonales.
(ix) Todas las matrices triangular superior.
(x) Todas las matrices triangular inferior.
(xi) Todas las matrices invertibles.
(xii) Todas las matrices no invertibles.
(xiii) Todas las matrices con $\det A = 1$.

6. Considere los sistemas de ecuaciones lineales

$$(1)\quad \left.\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases}\right\}, \qquad\qquad (2)\quad \left.\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 4x+5y+6z=9 \\ 7x+8y+9z=15 \end{cases}\right\}.$$

Sea $U$ el conjunto de todas las soluciones de (1) y $W$ el conjunto de todas las soluciones de (2). Note que se pueden ver como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

2 pts. (a) Demuestre que $U$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y descríbalo geométricamente.

1 pts. (b) Demuestre que $W$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

1 pts. (c) Demuestre que $W$ es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ y descríbalo geométricamente.

---

## Ejercicios voluntarios[1]

---

7. Sea $U$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

8. (a) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_2 \\ x_2+y_1 \end{pmatrix},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

(b) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\boxplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \lambda \boxdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

9. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.

(a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

(b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1,1,\dots,1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(d) Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ fijo. ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^k$?

(e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de $\mathbb{R}^k$?