Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 2

Espacios vectoriales; vectores en $\mathbb{R}^2$. Fecha de entrega: 22 de agosto de 2024

---

5 pts.

1. De todos los siguientes conjuntos diga si es un espacio vectorial con su suma y producto usual y justifique su respuesta bien.

   (a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   (d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.

5 pts.

2. Sean $P(2,3)$, $Q(-1,4)$ puntos en $\mathbb{R}^2$ y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule y grafique $\overrightarrow{PQ}$, $\|\overrightarrow{PQ}\|$, $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$, $\overrightarrow{PQ} - \vec{v}$.

   (b) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de $\vec{v}$.

   (c) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que son paralelos a $\vec{v}$.

   (d) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que $\vec{v}$ y que tienen el doble de la longitud de $\vec{v}$.

   (e) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a $\vec{v}$.
   Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a $\vec{v}$.

2 pts.

3. Para los siguientes vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

   (a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5 pts.

4. (a) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son paralelos:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$, (iii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$.

   (b) Para las siguientes parejas $\vec{v}$ y $\vec{w}$ encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares:

   (i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 pts.

5. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcule $\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$.

(b) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 0$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

(c) Encuentre todos los vectors $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\operatorname{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 2$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.

(a) Demustre que $\|\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{a}\|$.

(b) Encuentre condiciones para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ para que $\|\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| = \|\vec{a}\|$.

(c) ¿Es cierto que $\|\operatorname{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{b}\|$?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.