Álgebra lineal

Taller 10

Kernel e imagen; bases y dimensión.

Fecha de entrega: 18 de abril de 2024

---

3 pts.

1. Sea F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$.

   (a) Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.

   (b) Encuentre un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\} = F$.

   (c) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^3$.

6 pts.

2. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Determine si estos vectoren generan el espacio $\mathbb{R}^3$. Si lo hacen, escoja una base de $\mathbb{R}^3$ de los vectores dados.

   (b) Sean $p_1 = x^2 + 7, p_2 = x + 1, p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3.

10 pts.

3. Determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel[1].

   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to M(2 \times 2),\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

   (b) $B : \mathbb{R}^3 \to M(2 \times 2),\ B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

   (c) $C : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), \quad C(M) = M + M^t$

   (d) $D : P_3 \to P_4, \quad Dp = p' + xp$,

   (e) $S : P_3 \to M(2 \times 3), \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 3 \end{pmatrix}$.

[1] El kernel de una transformación lineal $T : V \to W$ son todos los vectores $x \in V$ que satisface $Tx = \mathbb{O}$