Álgebra lineal — Taller 5

Matrices y vectores. Fecha de entrega: 29 de febrero de 2024

5 pts. **1.** (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n)$ y sea $\vec{e}_k$ el k-ésimo vector unitario en $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector en $\mathbb{R}^n$ cuya k-ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule $A\vec{e}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A.

(b) Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).

(c) Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.

(d) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{v} = \vec{0}$.

(e) Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

8 pts. **2.** De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 pts. **3.** (a) Calcule la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Use el resultado del literal anterior para encontrar una vector $\vec{x}$ y matrices B, C, D tal que

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad AC = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:
Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

1 pts. (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que siginifican los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

1 pts. (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuántos chocolates y cuántas mentas contienen:

(i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B,
(ii) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B.

2 pts. (c) Determine si es posible conseguir

(i) 5 chocolates y 15 mentas,
(ii) 2 chocolates y 11 mentas,
(iii) 21 chocolates y 23 mentas,
(iv) 14 chocolates y 19 mentas.

comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

Ejercicios voluntarios[1]

5. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

(a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene exactamente una solución para $\vec{x}$.

(b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene infinitas soluciones para $\vec{x}$.

(c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que $(*)$ tiene ninguna solución para $\vec{x}$.

(d) Haga lo mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$.

(e) Haga los mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de $(*)$ donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 pts. **6.** (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{e}_1$ a $\vec{v}$ y el vector $\vec{e}_2$ a $\vec{w}$.

(ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector $\vec{v}$ a $\vec{e}_1$ y el vector $\vec{w}$ a $\vec{e}_2$.

(b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.