Álgebra lineal

Taller 4

Proceso de eliminación de Gauß y Gauß-Jordan. Fecha de entrega: 22 de febrero de 2024

2 pts. **1.** (a) En una panadería hay café, té, palito de queso y brownie. El primer cliente compra un café, un brownie y dos palitos de queso. Paga 12.000 pesos. El segundo cliente compra un té, un café y dos brownies. Paga 11.500 pesos. Después entran dos grupos de personas. El primer grupo pide 3 cafés, 4 tés, 3 palitos de queso y 5 brownies. En total pagan 42.000 pesos. El otro grupo pide 5 cafés, un té, 4 palitos de queso y 3 brownies y paga 37.000 pesos.

¿Cuánto cuestan los productos café, té, palito de queso y brownie en la panadería?

2 pts. (b) En un café un cliente pide dos espresos y 1 muffin y paga 7 euros. Un grupo de amigos pide 5 espresos y 6 muffins. Otro grupo pide 3 espresos y 4 muffins y paga 10 euros menos que el primer grupo. Determine cuánto cuestan el espreso y el muffin.

8 pts. **2.** Use la eliminición de Gauß o Gauß-Jordan para encontrar todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 28, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 13, \\ x_1 - 2x_2 &= -4, \\ 4x_1 + 5x_2 &= 23. \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= -9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 19. \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= -13, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 21, \\ 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 13. \end{aligned}$$

2 pts. **3.** (a) Encuentre un polinomio P de grado 3 con

$$P(1) = 2, \quad P(-1) = 6, \quad P'(1) = 8, \quad P(0) + 4P'(0) = 0.$$

1 pts. (b) ¿Existe un polinomio de grado 2 que satisface lo de arriba? De ser así, ¿cuántos hay? Justifique su respuesta.

1 pts. (c) ¿Existe un polinomio de grado 4 que satisface lo de arriba De ser así, ¿cuántos hay? Justifique su respuesta.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Responda a las siguientes preguntas y justifique su respuesta.

2 pts. (a) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts. (b) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ con $x_1 = 2$ que satisfacen $A\vec{x} = \vec{b}$.

1 pts. (c) ¿Cuántos $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ existen tal que la primera componente de $A\vec{x}$ sea igual a 3?

Ejercicios voluntarios[1]

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

6. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.

   (b) Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \| \vec{x}$. Para cada tal $\vec{x}$, encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.