

Álgebra lineal

Taller 2

Vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Fecha de entrega: 08 de febrero de 2024

5 pts.

1. Sean $P(2, 3)$, $Q(-1, 4)$ puntos en \mathbb{R}^2 y sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ un vector en \mathbb{R}^2 .

- (a) Calcule y grafique \overrightarrow{PQ} , $\|\overrightarrow{PQ}\|$, $\overrightarrow{PQ} + \vec{v}$, $\overrightarrow{PQ} - \vec{v}$.
- (b) Encuentre todos los vectores unitarios cuya dirección es opuesta a la de \vec{v} .
- (c) Encuentre todos los vectores de longitud 3 que son paralelos a \vec{v} .
- (d) Encuentre todos los vectores que tienen la misma dirección que \vec{v} y que tienen el doble de la longitud de \vec{v} .
- (e) Encuentre todos los vectores que son ortogonales a \vec{v} .
Encuentre todos los vectores con norma 2 que son ortogonales a \vec{v} .

2 pts.

2. Para los siguientes vectores \vec{u} y \vec{v} decida si son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Calcule el coseno del ángulo entre ellos. Si son paralelos, encuentre números reales λ y μ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ y $\vec{u} = \mu\vec{v}$.

$$(a) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5 pts.

3. (a) Para las siguientes parejas \vec{v} y \vec{w} encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que \vec{v} y \vec{w} son paralelos:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (iii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Para las siguientes parejas \vec{v} y \vec{w} encuentre todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que \vec{v} y \vec{w} son perpendiculares:

$$(i) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3 pts.

4. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcule $\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}$ y $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$.
- (b) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 0$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.
- (c) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\text{proy}_{\vec{a}} \vec{v}\| = 2$. Describa este conjunto geométricamente y haga un bosquejo.

1 pts.

5. (a) Calcule el área del triángulo con los vértices adyacentes $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(-1, 2, -5)$.

2 pts.

(b) Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

- (c) Sean \vec{v} y \vec{w} los vectores del literal (b). ¿Cuántos vectores \vec{a} con norma 7 hay tal que el volumen del paralelepípedo generado por $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$ sea 24? Diga geoméricamente cómo se encuentran todos los \vec{a} con esta propiedad y calcule dos de ellos.

Ejercicios voluntarios¹

6. (a) Demuestre que no existe un elemento neutral para el producto cruz en \mathbb{R}^3 . Es decir: Demuestre que no existe ningún vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{w}$ para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- (i) Encuentre todos los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- (ii) Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 4$.
7. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ con $\vec{b} \neq \vec{0}$.
- (a) Demuestre que $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{a}\|$.
- (b) Encuentre condiciones para \vec{a} y \vec{b} para que $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| = \|\vec{a}\|$.
- (c) ¿Es cierto que $\|\text{proy}_{\vec{b}} \vec{a}\| \leq \|\vec{b}\|$?

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.