Universidad de los Andes, MATE-1105

Álgebra lineal

Taller 1

Sistemas lineales; espacios vectoriales.

Fecha de entrega: 01 de febrero de 2024

---

8 pts.

1. Encuentre todas las soluciones de los siguientes sistemas y visualice las ecuaciones y las soluciones en el plano.

(a) $3x + 5y = 7, \quad -9x - 15y = 10,$

(b) $2x + 5y = 10, \quad x + 2y + 3 = 0,$

(c) $2x + y = 4, \quad 3x - 2y = -1, \quad 5x + 3y = 7,$

(d) $x + 5y = 3, \quad -3x + 2y = 8, \quad 2x + 3y = -1.$

2 pts.

2. (a) Encuentre todos los números k tal que el siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución y calcule esta solución.

$$kx + 5y = 0, \qquad 3x + (2+k)y = 0.$$

Qué pasa para los otros k?

2 pts.

(b) Haga lo mismo para el sistema

$$kx + 5y = 5, \qquad 3x + (2+k)y = -3.$$

3 pts.

3. En una bodega hay soluciones de un cierto químico con concentraciones de $1\,\%$ y de $13\,\%$. ¿Cuántos mililitros de cada una de las soluciónes disponibles se requieren para obtener 500 ml de una solucón de este químico con contentración de $5\,\%$?

5 pts.

4. De todos los siguientes conjuntos diga si es un espacio vectorial con su suma y producto usual y justifique su respuesta bien.

(a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$

(c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.

Ejercicios voluntarios[1]

5. Repita el ejercicio 2 pero con el sistema

- $kx + 2y = 0,\ 2x - (3+k)y = 0$ en el literal (a) y
- $kx + 2y = 6,\ 2x - (3+k)y = -3$ en el literal (b).

6. Considere la ecuación

$$3x + 4y = 5. \tag{$*$}$$

(a) ¿Existe otra ecuación lineal tal que la solución del sistema de $(*)$ y la nueva ecuación es $(3,-1)$? Encuentre tal ecuación o diga por qué no existe.

(b) ¿Existen otras dos ecuaciones lineales tal que la solución del sistema de $(*)$ y las nuevas ecuaciones es $(3,-1)$? Encuentre tales ecuaciones o diga por qué no existen.

(c) ¿Existe otra ecuación lineal tal que la solución del sistema de $(*)$ y la nueva ecuación es $(2,-3)$? Encuentre tal ecuación o diga por qué no existe.

(d) ¿Existen otras dos ecuaciones lineales tal que la solución del sistema de $(*)$ y las nuevas ecuaciones es $(2,-3)$? Encuentre tales ecuaciones o diga por qué no existen.

(e) Encuentre otra ecuación lineal tal que el sistema de $(*)$ y la nueva ecuación no tenga solución.

(f) Encuentre otra ecuación lineal tal que el sistema de $(*)$ y la nueva ecuación tenga infinitas soluciones.

Recuerde que un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ es un conjunto V con una *suma* $u + v \in V$ para $u, v \in V$ y un *producto* $\lambda v \in V$ para $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

(I) *asociatividad*: $(u+v)+w = u+(v+w)$ para todo $u, v, w \in V$,

(II) *conmutatividad*: $u + v = v + v$ para todo $u, v \in V$,

(III) *elemento neutral*: Existe un $\mathbb{0} \in V$ tal que $\mathbb{0} + v = v$ para todo $v \in V$,

(IV) *inverso aditivo*: Para todo $v \in V$ existe un elemento $\widetilde{v} \in V$ tal que $v + \widetilde{v} = \mathbb{0}$,

(V) $1v = v$.

(VI) *compatibilidad*: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,

(VII) *distributividad*: $\lambda(v+u) = \lambda u + \lambda v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$,
$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

7. Demuestre lo siguiente:

(a) El elemento neutral es único.

(b) $0v = \mathbb{0}$ para todo $v \in V$.

(c) $\lambda\mathbb{0} = \mathbb{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(d) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ es único.

(e) Dado $v \in V$, su inverso $\widetilde{v}$ cumple $\widetilde{v} = (-1)v$.

---

[1]Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.