Álgebra lineal

Taller 13

Representación matricial de transformaciones lineales.
Bases ortonormales.

Fecha de entrega: 17 de noviembre de 2023

---

1. Considere el plano E en $\mathbb{R}^3$ dado por $x + y - 3z = 0$.

2 pts. (a) Encuentre una base ortonormal para E.

2 pts. (b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

2 pts. (c) Escriba el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de la base encontrada en el literal anterior.

2. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal para U.

2 pts. (b) Encuentre la dimensión de U y la dimensión de su complemento ortogonal.

3. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

2 pts. (a) Sea $P(0, 2, 5)$. Encuentre el punto $Q \in U$ que esté más cercano a P y calcule la distancia entre P y Q.

2 pts. (b) ¿Hay un punto $R \in U$ que esté a una distancia máximal de P?

2 pts. (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estandar).

4. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

3 pts. (a) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

4 pts. (b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal para U. (El proceso de Gram-Schmidt introduremos en la clase del miércoles. Si ya se quieren adelantar: está en la página 288-290 en las notas de clase.)

3 pts. (c) Encuentre una base para $U^{\perp}$.

Ejercicios voluntarios[1]

5. Sea $W = \text{gen}\{(1,1,1,1)^t,\ (2,1,1,0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

   (a) Encuentre una base ortogonal para W.

   (b) Sean $A_1(1,2,0,1)$, $A_2(11,4,4,-3)$, $A_3(0,-1,-1,0)$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Para cada $j = 1,2,3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j.

   (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

6. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientesy encuentre una base ortonormal para $U = \text{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

7. Encuentre una base ortonormal para $U^\perp$ donde $U = \text{gen}\{(1,0,2,4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

8. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.

   (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.

   (b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.

   (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.

   (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

9. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

10. (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/16} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

   (b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

   (c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.