

Álgebra lineal

Bases.

Representación matricial de transformaciones lineales. Fecha de entrega: 10 de noviembre de 2023

3 pts. 1. Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

(a) Demuestre que \mathcal{A} y \mathcal{B} son bases de \mathbb{R}^2 .

(b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y \vec{x} (en la representación estándar).

(c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y \vec{y} (en la representación estándar).

1 pts. 2. (a) Demuestre que la siguiente función es lineal:

$$\Phi : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2), \quad \Phi(A) = A^t$$

2 pts. (b) Sea $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estándar¹ de $M(2 \times 2)$. Encuentre la matriz que representa a Φ con respecto a esta base.

2 pts. (c) Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$. Demuestre que \mathcal{C} es una base de $M(2 \times 2)$ y escriba Φ como matriz con respecto a esta base.

1 pts. 3. (a) Demuestre que $T : P_3 \rightarrow P_3$, $Tp = p'$ es una función lineal.

2 pts. (b) Determine $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$, $\dim(\ker(T))$, $\dim(\text{Im}(T))$.

2 pts. (c) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base estándar de P_3 . Encuentre la matriz que representa a T con respecto a esta base.

1 pts. (d) Sean $q_1 = X + 1$, $q_2 = X - 1$, $q_3 = X^2 + X$, $q_4 = X^3 + 1$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es una base de P_3 .

2 pts. (e) Encuentre la matriz que representa a T con respecto a la base \mathcal{C} .

4. En \mathbb{R}^3 considere el plano $E : 2x - y + z = 0$. Sea Q la proyección ortogonal sobre E .

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de Q (con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3).

1 pts. (b) Encuentre el kernel de Q y dé una interpretación geométrica.

1 pts. (c) Encuentre la imagen de Q y dé una interpretación geométrica.

Sugerencia: Primero encuentre una base de \mathbb{R}^2 adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecto a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una representación matricial con respecto a la base canónica.

¹ $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio voluntario²

5. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.
- (a) ¿Cuáles son las dimensiones posibles de $\ker A$ y $\text{Im } A$?
 - (b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0$, $\dim(\ker A_1) = 1$, \dots . Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.
6. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de \mathbb{R}^2 y sean $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (dados en coordenadas cartesianas).
- (a) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular \vec{b}_1 y \vec{b}_2 ? Si sí, calcúelos. Si no, explique por qué no es posible.
 - (b) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular \vec{b}_1 y \vec{b}_2 ? Si sí, calcúelos. Si no, explique por qué no es posible.
 - (c) ¿Existen \vec{b}_1 y \vec{b}_2 tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúelos. Si no, explique por qué no es posible.
 - (d) ¿Existen \vec{b}_1 y \vec{b}_2 tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúelos. Si no, explique por qué no es posible.
7. Sean B, C, D y S las transformaciones lineales del Ejercicio 1 del Taller 11. Representélas como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.
8. En \mathbb{R}^2 considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea P la proyección ortogonal sobre L .
- (a) Encuentre la representación matricial de P (con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2).
 - (b) Encuentre el kernel de P y dé una interpretación geométrica.
 - (c) Encuentre la imagen de P y dé una interpretación geométrica.

²Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.