

Álgebra lineal

6 pts. 1. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

(b) Escriba los vectores \vec{x} y \vec{y} como combinaciones lineales de la base \mathcal{B} .

6 pts. 2. Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las siguientes matrices como combinaciones lineales de los elementos de la base.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 pts. 3. De las siguientes matrices, encuentre una base de la imagen y su dimensión.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

1 pts. 4. (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3 .

1 pts. (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \rightarrow P_k$ para $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 3$?

Ejercicios voluntarios¹

5. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

(i) A inyectiva $\implies m \geq n$.

(ii) A sobreyectiva $\implies n \geq m$.

Demuestre que la implicación “ \Leftarrow ” en (i) and (ii) en general es falsa.

6. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es biyectivo. Demuestre que $m = n$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.