Álgebra lineal Taller 6

Matrices inversas; matrices elementales. Fecha de entrega: 22 de septiembre de 2023

4 pts. 1. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.

6 pts. 2. (a) Encuentre $(S_j(c))^{-1}, (Q_{ij}(c))^{-1}, (P_{ij})^{-1}$.

6 pts. (b) Encuentre $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

3 pts. 3. Escoja tres de las siguientes afirmaciones y diga si son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.

(a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es símetrica.
(b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es símetrica.
(c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
(d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es símetrica.
(e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
(f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es símetrica.
(g) $AA^t = A^tA$ para toda matriz $A \in M(n \times n)$.

2 pts. 4. (a) Sea $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

2 pts. (b) Demuestre que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (Es decir: Si $A \in M(n \times n)$, entonces existen matrices $B, C \in M(n \times n)$ tal que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.)

Ejercicios voluntarios[1]

5. Sean $R, S \in M(n, n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \quad \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

6. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.

(b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

7. **Inversa de una matriz a bloques.** Sean A, B, C, D matrices $n \times n$ y suponga que A es invertible. Consideramos la matriz a bloques

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(a) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

(b) Demuestre que $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ son invertibles y encuentre sus inversas.

(c) Demuestre que, bajo la hipótesis que A es invertible, la matrix $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $C - CA^{-1}B$ lo es. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}\left\{A + B[D - CA^{-1}B)^{-1}C\right\} & -A^{-1}B[D - CA^{-1}B]^{-1} \\ -[D - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & [D - CA^{-1}B]^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Verifique que para el caso cuando A, B, C, D son números coincide con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(e) ¿Cómo serían la fórmulas si asumimos que D es invertible?

8. Sea $A \in M(m \times n)$.

(a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.

(b) Sea $B \in M(n \times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.

(c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x}\rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.