Álgebra lineal

Taller 15

Valores y vectores propios; diagonalización.

Fecha de entrega: 25 de mayo de 2023

---

1 pts. **1.** Sea $Q \in M(n \times n)$ una matriz ortogonal. Demuestre que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\langle Q\vec{x}\,, Q\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}\,, \vec{y}\rangle.$$

Concluya que

1 pts. (a) Q no cambia magnitudes de vectores, es decir que $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

1 pts. (b) Q no cambia ángulos entre vectores, es decir que $\sphericalangle(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

3 pts. **2.** Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) ¿Existe una matriz $A \in M(3 \times 3)$ tal que $\vec{v}$ es vector propio con valor propio 5 y $\vec{w}$ es vector propio con valor propio 2?

(b) ¿Existe una matriz simétrica $A \in M(3 \times 3)$ tal que $\vec{v}$ es vector propio con valor propio 5 y $\vec{w}$ es vector propio con valor propio 2?

(c) ¿Existe una matriz simétrica $A \in M(3 \times 3)$ tal que $\vec{v}$ es vector propio con valor propio 5 y $\vec{w}$ es vector propio con valor propio 5?

En los tres casos debe encontrar una matriz que sirva o justificar por qué no existe.

3. Considere la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6. \tag{1}$$

1 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.

4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática (1) de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.

2 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación (1). Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

4. Considere la ecuación

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 = 15. \tag{2}$$

1 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.

4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática (2) de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.

2 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación (2). Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

Ejercicios voluntarios[1]

5. (a) Sea $\Phi : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R})$, $\Phi(A) = A^t + A$. Encuentre los valores propios y los espacios propios de Φ.

   (b) Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grade menor o igual a 0 con coeficientes reales. Encuentre los valores propios y los espacios propios de $T : P_2 \to P_2$, $\quad Tp = p' + 3p$.

   (c) Sea R la reflexión en el plano $P : x + 2y + 3z = 0$ en $\mathbb{R}^3$. Calcule los valores propios y los espacios propios de R.

6. Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ una matriz hermitiana tal que todos sus autovalores son estrictamente mayores a 0. Sea $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ el producto interno estandar en $\mathbb{C}^n$. Demuestre que A induce un producto interno en $\mathbb{C}^n$ a través de

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad (x, y) := \langle Ax\,, y \rangle.$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

   Hint. Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $A = C^{-1}DC$ y use esto para calcular A^n.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.