

# Álgebra lineal

4 pts.

1. Dados la matriz  $A$  y los vectores  $u$  y  $w$ :

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -18 \\ -30 & -20 & 36 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Diga si los vectores  $u$  y  $w$  son autovectores de  $A$ . Si lo son, cuáles son los valores propios correspondientes?  
 (b) Calcule todos los valores propios de  $A$ .

5 pts.

2. Encuentre los vectores y espacios propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9 pts.

3. Para las siguientes matrices, encuentre los vectores propios, los espacios propios, una matriz invertible  $C$  y una matriz diagonal  $D$  tal que  $C^{-1}AC = D$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 pts.

4. Encuentre los valores propios, los espacios propios y el polinomio característico de la siguiente matriz  $n \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

*Hint.* Encuentre la dimensión del kernel de  $A$ . ¿Qué nos dice sobre el polinomio característico? Después mire la imagen.

---

---

### Ejercicios voluntarios<sup>1</sup>

---

---

5. Encuentre los valores propios y los espacios propios de las siguientes matrices  $n \times n$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix},$$

6. (a) Sea  $\varphi \in \mathbb{R}$  y sean  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ . Demuestre que  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Encuentre la matriz  $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$  que describe rotación por  $\alpha$  contra las manecillas del reloj.
- (c) Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Explique por qué es claro que  $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$ . Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

7. Sea  $Q \in M(2 \times 2)$  una matriz ortogonal. Demuestre que es de la forma  $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  o  $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$  para un  $\varphi \in \mathbb{R}$ .
- 

**Definición.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$  (con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Un *producto interno* es una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  tal que para todo  $x, y, z \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

- (I)  $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$ , (Linealidad en la primera componente)
- (II)  $\langle x, z \rangle = \overline{\langle x, z \rangle}$  (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)
- (III)  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,
- (IV)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ,

Observe que

- (i) y (iii) implican  $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ,
- (ii) implica que  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

**Definición.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y sean  $x, y \in V$ . Entonces  $x$  es *ortogonal a y* si y solo si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Notación en este caso:  $x \perp y$ .

<sup>1</sup>Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

**Ejemplos.** El producto punto en  $\mathbb{R}^n$  es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercicio 2.

**Definición.** Sea  $A \in m(n \times n)$ . Entonces la *matriz adjunta* es aquella que conseguimos de  $A$  al transponerla y conjugar sus entradas (como números complejos).

**Ejemplos.** 
$$\begin{pmatrix} 3+1 & 5-4i \\ 8 & 9i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3-1 & 8 \\ 5+4i & -9i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+2i & 3+4i \\ 5+6i & 7+8i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-2i & 5-6i \\ 3-4i & 7-8i \end{pmatrix}.$$

**Ejercicios.**

1. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en  $\mathbb{C}^n$ :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

- (b) Sea  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ . Demuestre que  $A^*$  es la única matriz con

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

2. (a) Sea  $V$  el espacio de todas las funciones continuas  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Claramente  $V$  es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en  $V$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx, \quad \text{para } f, g \in V. \quad (1)$$

- (b) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1, \quad v_n(x) = \sin(n\pi x), \quad w_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en  $C[0, 1]$  con el producto interno definido en (1).

- (c) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = x$ ,  $p_2 = x^2$ ,  $p_3 = x^3$  para obtener una base ortonormal  $\{q_0, \dots, q_3\}$  de  $P_3$  con el producto interno definido en (1).

*Observación.* Salvo constantes multiplicativas, el polinomio  $q_j$  es el *polinomio  $j$ -ésimo de Legendre*.

**Definición.** Sean  $U, V$  espacios vectoriales con normas  $\|\cdot\|_U$  y  $\|\cdot\|_V$ . Una función lineal  $T : U \rightarrow V$  se llama *isometría* si para todo  $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si  $Tu = 0$ , entonces  $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$ , por tanto  $u = 0$ ).

**Ejemplos.**

- Rotaciones en  $\mathbb{R}^n$ .
- Reflexiones en  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejercicios.**

1. Sea  $n \in \mathbb{N}$  y sean  $Q, T \in M(n \times n)$ .

- (a) Demuestre que  $T$  es una isometría si y solo si  $\langle T\vec{x}, T\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  para todo  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  (es decir: una isometría mantiene ángulos).
  - (b) Demuestre que  $Q$  es una matriz ortogonal si y solo si  $Q$  es una isometría.
- 

**Definición.** Un grupo es un conjunto no-vacío  $G$  junto con una operación  $G \times G \rightarrow G$  tal que:

- (I) *Existencia de un elemento neutro:* existe un  $e \in G$  tal que  $eg = ge = g$  para todo  $g \in G$ .
- (II) *Existencia de inversos:* para todo  $g \in G$  existe un  $\tilde{g} \in G$  tal que  $g\tilde{g} = \tilde{g}g = e$ .
- (III) *Asociatividad:* para todo  $g, h, k \in G$  se tiene que  $(gh)k = g(hk)$ .

El grupo  $G$  se llama *conmutativo* si además  $gh = hg$  para todo  $g, h \in G$ .

**Ejemplos.**

- (I)  $\mathbb{Z}$  con la suma;
- (II)  $\mathbb{Q}$  con la suma;
- (III)  $\mathbb{R}$  con la suma;
- (IV)  $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$  con el producto;
- (V)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  con el producto;
- (VI) funciones  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con la suma;
- (VII)  $M(n \times n)$  con la suma;
- (VIII) cada espacio vectorial con su suma;
- (IX) funciones biyectivas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con la composición;
- (X)  $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$  con producto;
- (XI) funciones lineales biyectivas  $V \rightarrow V$  con la composición donde  $V$  es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)–(xi) son no-conmutativos para  $n \geq 2$ .

**Ejercicios.**

1. Demuestre que los ejemplos arriba son grupos.

2. Sean  $O(n) = \{Q \in M(n \times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$  y  $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$ .

- (a) Demuestre que  $O(n)$  con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:
  - (i) Para todo  $Q, R \in O(n)$ , la composición  $QR$  es un elemento en  $O(n)$ .
  - (ii) Existe un  $E \in O(n)$  tal que  $QE = Q$  y  $EQ = Q$  para todo  $Q \in O(n)$ .
  - (iii) Para todo  $Q \in O(n)$  existe un elemento inverso  $\tilde{Q}$  tal que  $\tilde{Q}Q = Q\tilde{Q} = E$ .
- (b) ¿Es  $O(n)$  conmutativo (es decir, se tiene  $QR = RQ$  para todo  $Q, R \in O(n)$ )?
- (c) Demuestre que  $SO(n)$  con la composición es un grupo.