Álgebra lineal

Taller 13

Representación matricial de transformaciones lineales.
Bases ortonormales.

Fecha de entrega: 11 de mayo de 2023

1. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal para U.

2 pts. (b) Encuentre la dimensión de U y la dimensión de su complemento ortogonal.

2. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

3 pts. (a) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

4 pts. (b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal para U.

3 pts. (c) Encuentre una base para $U^\perp$.

3. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

2 pts. (a) Sea $P(0, 2, 5)$. Encuentre el punto $Q \in U$ que esté más cercano a P y calcule la distancia entre P y Q.

2 pts. (b) ¿Hay un punto $R \in U$ que esté a una distancia máximal de P?

2 pts. (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estandar).

Ejercicios voluntarios[1]

---

4. Sea $W = \operatorname{gen}\{(1, 1, 1, 1)^t,\ (2, 1, 1, 0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Encuentre una base ortogonal para W.

(b) Sean $A_1(1, 2, 0, 1)$, $A_2(11, 4, 4, -3)$, $A_3(0, -1, -1, 0)$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Para cada $j = 1, 2, 3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j.

(c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

5. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientesy encuentre una base ortonormal para $U = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

6. Encuentre una base ortonormal para $U^\perp$ donde $U = \text{gen}\{(1,0,2,4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

7. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.

   (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.

   (b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.

   (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.

   (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.