Universidad de los Andes, MATE-1105

# Álgebra lineal

Taller 12

Bases.

Representación matricial de transformaciones lineales. Fecha de entrega: 04 de mayo de 2023

---

1 pts. **1.** (a) Demuestre que $T : P_3 \to P_3,\ Tp = p'$ es una función lineal.

2 pts. (b) Determine $\ker(T),\ \mathrm{Im}(T),\ \dim(\ker(T)),\ \dim(\mathrm{Im}(T))$.

2 pts. (c) Sea $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base estandar de $P_3$. Encuentre la matriz que representa a $T$ con respecto a esta base.

1 pts. (d) Sean $q_1 = X+1,\ q_2 = X-1,\ q_3 = X^2+X,\ q_4 = X^3+1$. Demuestre que $\mathcal{C} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ es una base de $P_3$. .

2 pts. (e) Encuentre la matriz que representa a $T$ con respecto a la base $\mathcal{C}$.

**2.** En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $E : 2x - y + z = 0$. Sea $Q$ la proyección ortogonal sobre $E$.

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de $Q$ (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

2 pts. (b) Encuentre el kernel de $Q$ y dé una interpretación geométrica.

2 pts. (c) Encuentre la imagen de $Q$ y dé una interpretación geométrica.

*Sugerencia: Primero encuentre una base de $\mathbb{R}^2$ adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecta a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una reprsentación matricial con respecto a la base canónica.*

**3.** Considere el plano $E$ en $\mathbb{R}^3$ dado por $x + y - 3z = 0$.

2 pts. (a) Encuentre una base ortonormal para $E$.

2 pts. (b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

2 pts. (c) Escriba el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de la base encontrada en el literal anterior.

## Ejercicio voluntario[1]

3 pts.

**4.** Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\mathcal{B} = \{R, S, T\}$ es una base del espacio de las matrices triangulares superiores y exprese las siguentes matrices como combinaciones lineales de los elementos de la base.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**5.** En $\mathbb{R}^2$ considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea $P$ la proyección ortogonal sobre $L$.

(a) Encuentre la representación matricial de $P$ (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$).

(b) Encuentre el kernel de $P$ y dé una interpretación geométrica.

(c) Encuentre la imagen de $P$ y dé una interpretación geométrica.

**6.** Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \text{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

**7.** (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/16} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

(b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

(c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.