

Álgebra lineal

1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.

2 pts.

(a) ¿Cuáles son las dimensiones posibles de $\ker A$ y $\text{Im } A$?

2 pts.

(b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0$, $\dim(\ker A_1) = 1, \dots$. Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

1 pts.

2. (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3 .

1 pts.

(b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \rightarrow P_k$ para $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 3$?

6 pts.

3. Sean $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$.

(a) Demuestre que \mathcal{A} y \mathcal{B} son bases de \mathbb{R}^2 .

(b) Sea $(\vec{x})_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{x})_{\mathcal{B}}$ y \vec{x} (en la representación estándar).

(c) Sea $(\vec{y})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre $(\vec{y})_{\mathcal{A}}$ y \vec{y} (en la representación estándar).

2 pts.

4. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

(b) Escriba los vectores \vec{x} y \vec{y} como combinaciones lineales de la base \mathcal{B} .

2 pts.

5. (a) Demuestre que la siguiente función es lineal:

$$\Phi : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2), \quad \Phi(A) = A^t$$

2 pts.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ la base estándar¹ de $M(2 \times 2)$. Encuentre la matriz que representa a Φ con respecto a esta base.

2 pts.

(c) Sean $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $\mathcal{C} = \{R, S, T, U\}$. Demuestre que \mathcal{C} es una base de $M(2 \times 2)$ y escriba Φ como matriz con respecto a esta base.

¹ $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicios voluntarios²

6. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

(I) A inyectiva $\implies m \geq n$.

(II) A sobreyectiva $\implies n \geq m$.

Demuestre que la implicación " \Leftarrow " en (i) and (ii) en general es falsa.

7. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es biyectivo. Demuestre que $m = n$.

8. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de \mathbb{R}^2 y sean $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ (dados en coordenadas cartesianas).

(a) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular \vec{b}_1 y \vec{b}_2 ? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(b) Si se sabe que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, es posible calcular \vec{b}_1 y \vec{b}_2 ? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(c) ¿Existen \vec{b}_1 y \vec{b}_2 tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

(d) ¿Existen \vec{b}_1 y \vec{b}_2 tal que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$? Si sí, calcúlelos. Si no, explique por qué no es posible.

9. Sean B, C, D y S las transformaciones lineales del Ejercicio 1 del Taller 11. Representélas como matrices y utilice estas representaciones para encontrar sus kernels e imágenes y las dimensiones correspondientes.

²Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.