

Álgebra lineal

3 pts. 1. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

- (a) Escriba E en la forma $E : ax + by + cz = d$.
- (b) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , tal que $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, w\} = E$.
- (c) Encuentre un vector $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.

3 pts. 2. (a) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2 ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M_{\text{sym}}(2 \times 2) \setminus \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

3 pts. (b) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2 ?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M_{\text{sym}}(2 \times 2) \setminus \text{span}\{B_1, B_2, B_3\}$.

3 pts. (c) ¿El siguiente conjunto genera las matrices triangulares superiores 2×2 ?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M(2 \times 2)$ que es triangular superior pero que no pertenece a $\text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

1 pts. 3. (a) ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ?

1 pts. (b) ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ?

1 pts. (c) ¿Los vectores $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $M(2 \times 3)$?

2 pts. (d) ¿Los vectores $p_1 = X^2 - X + 2$, $p_2 = X + 3$, $p_3 = X^2 - 1$ son linealmente independientes en P_2 ? ¿Son linealmente independientes en P_n para $n \geq 3$?

3 pts. 4. Sea V un espacio vectorial. Falso o verdadero? Justifique su respuesta.

- (a) Suponga $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$ tal que z es combinación lineal de los v_1, \dots, v_k . Entonces z es combinación lineal de v_1, \dots, v_k, u .

- (b) Si u es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces v_1, \dots, v_k, u es un sistema de vectores linealmente dependientes.
- (c) Si $v_1, \dots, v_k \in V$ es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces v_1 es combinación lineal de los v_2, \dots, v_k .

Ejercicios voluntarios¹

5. (a) ¿Es \mathbb{C}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{R} ?
 (b) ¿Es \mathbb{C}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} ?
 (c) ¿Es \mathbb{R}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{C} ?
 (d) ¿Es \mathbb{R}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} ?
 (e) ¿Es \mathbb{Q}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{R} ?
 (f) ¿Es \mathbb{Q}^n un espacio vectorial sobre \mathbb{C} ?
6. Sea F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$.
- (a) Demuestre que F es subespacio de \mathbb{R}^3 y encuentre vectores \vec{u} y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.
 (b) Encuentre un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, distinto de \vec{u} y \vec{w} , tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\} = F$.
 (c) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^3$.
7. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y sea $U = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.
- (a) Diga qué es U geoméricamente.
 (b) Encuentre tres vectores diferentes en U .
 (c) Encuentre tres vectores diferentes en \mathbb{R}^3 que no pertenecen a U .
 (d) ¿Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}, \vec{b}$ pertenecen a U ?
8. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.
- (a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
 (b) Encuentre matrices que generan V . ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V ?
9. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial indicado.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}; \mathbb{R}^2.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; M(2 \times 2).$

(c) $p_1 = 1 + x, p_2 = x + x^2, p_3 = x^2 + x^3, p_4 = 1 + x + x^2 + x^3; P_3.$

10. (a) (i) Encuentre una base para el plano $E : x - 2y + 3z = 0$ in \mathbb{R}^3 .

(ii) Complete la base encontrado en (i) a una base de \mathbb{R}^3 .

(b) Sea $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\}$.

(i) Demuestre que F es un subespacio de \mathbb{R}^4

(ii) Encuentre una base para F y calcule $\dim F$.

(iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de \mathbb{R}^4 .

(c) Sea $G := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(i) Demuestre que G es un subespacio de \mathbb{R}^4

(ii) Encuentre una base para G y calcule $\dim G$.

(iii) Complete la base encontrada en (ii) a una base de \mathbb{R}^4 .

11. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Determine si estos vectores generan el espacio \mathbb{R}^3 . Si lo hacen, escoja una base de \mathbb{R}^3 de los vectores dados.

(b) Sean $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Determine si estas matrices generan el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2 . Si lo hacen, escoja una base de las matrices dadas.

(c) Sean $p_1 = x^2 + 7, p_2 = x + 1, p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3 .

12. Determine si $\text{gen}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ para

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

13. Para los siguientes sistemas de vectores en el espacio vectorial V , determine la dimensión del espacio vectorial generado por ellos y escoja un subsistema de ellos que es base del espacio vectorial generado por los vectores dados. Complete este subsistema a una base de V .

(a) $V = \mathbb{R}^3, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $V = P_4, p_1 = x^3 + x, p_2 = x^3 - x^2 + 3x, p_3 = x^2 + 2x - 5, p_4 = x^3 + 3x + 2.$

(c) $V = M(2 \times 2), A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$

14. Sean V y W espacios vectoriales.

(a) Sea $U \subset V$ un subespacio y sean $u_1, \dots, u_k \in U$. Demuestre que $\text{gen}\{u_1, \dots, u_k\} \subset U$.

(b) Sean $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente:

(I) $\text{gen}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$.

(II) Para todo $j = 1, \dots, k$ tenemos $u_j \in \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \dots, m$ tenemos $w_\ell \in \text{gen}\{u_1, \dots, u_k\}$.

(c) Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\text{gen}\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\} = \text{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \dots, v_m\}.$$

(d) Sean $v_1, \dots, v_k \in V$ y sea $A : V \rightarrow W$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \text{gen}\{v_1, \dots, v_k\} = \dim \text{gen}\{Av_1, \dots, Av_k\}$. ¿Es verdad si A no es invertible?