

Álgebra lineal

- 6 pts. 1. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 6 pts. 2. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

- 2 pts. 3. Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

- 6 pts. 4. Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

Ejercicios voluntarios¹

5. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

6. El objetivo de este ejercicio es entender qué pasa con una matriz dada si la multiplicamos desde el lado derecho con una matriz elemental.

Sea $A \in M(m \times n)$ y sea E una matriz elemental.

- (a) Demuestre que $(AE)^t = FA^t$ donde F es una matriz elemental. Diga cuál matriz es F (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c)$, $Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

- (b) Use que $AE = ((AE)^t)^t$ y su resultado de (a) para describir en palabras como cambia A si la multiplicamos por el lado derecho con E (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c)$, $Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).
7. (a) Sea $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.
- (b) Demuestre que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (Es decir: Si $A \in M(n \times n)$, entonces existen matrices $B, C \in M(n \times n)$ tal que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.)