Álgebra lineal

Taller 6

Matrices inversas; matrices elementales.

Fecha de entrega: 09 de marzo de 2023

---

2 pts. **1.** (a) Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.

3 pts. (b) Encuentre $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

6 pts. **2.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

(a) Escriba A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

(b) Use el resultado de (a) para encontrar A^{-1}.

6 pts. **3.** Para las sigientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \dots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

3 pts. **4.** Escoja tres de las siguientes afirmaciones y diga si son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.

(a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es símetrica.

(b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es símetrica.

(c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

(d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es símetrica.

(e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.

(f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es símetrica.

(g) $AA^t = A^tA$ para toda matriz $A \in M(n \times n)$.

Ejercicios voluntarios[1]

---

5. (a) Sea $P_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2\times2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales en forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.

(b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

6. Sean $R, S \in M(n,n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \qquad \Longleftrightarrow R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

7. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.
   (b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

8. **Inversa de una matriz a bloques.** Sean A, B, C, D matrices $n \times n$ y suponga que A es invertible. Consideramos la matriz a bloques

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

.

   (a) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

   (b) Demuestre que $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ son invertibles y encuentre sus inversas.

   (c) Demuestre que, bajo la hipótesis que A es invertible, la matrix $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $C - CA^{-1}B$ lo es. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1}\left\{A + B[D - CA^{-1}B)^{-1}C\right\} & -A^{-1}B[D - CA^{-1}B]^{-1} \\ -[D - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & [D - CA^{-1}B]^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   (d) Verifique que para el caso cuando A, B, C, D son números coincide con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   (e) ¿Cómo serían la fórmulas si asumimos que D es invertible?

9. Sea $A \in M(m \times n)$.
   (a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.
   (b) Sea $B \in M(n \times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.
   (c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x}\rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.