

Álgebra lineal

4 pts.

1. (a) Sea $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in M(m \times n)$ y sea \vec{e}_k el k -ésimo vector unitario en \mathbb{R}^n (es decir, el vector en \mathbb{R}^n cuya k -ésima entrada es 1 y las demás son cero). Calcule $A\vec{e}_k$ para todo $k = 1, \dots, n$ y describa en palabras la relación del resultado con la matriz A .
- (b) Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que $A = 0$ (la matriz cuyas entradas son 0).
- (c) Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y suponga que $A\vec{x} = \vec{0}$ para todo $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $\vec{x} = \vec{0}$.
- (d) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, ambos distintos de cero, tal que $A\vec{v} = \vec{0}$.
- (e) Encuentre matrices $A, B \in M(2 \times 2)$ tal que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

4 pts.

2. (a) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
 - (i) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector \vec{e}_1 a \vec{v} y el vector \vec{e}_2 a \vec{w} .
 - (ii) Encuentre una matriz $B \in M(2 \times 2)$ que mapea el vector \vec{v} a \vec{e}_1 y el vector \vec{w} a \vec{e}_2 .
- (b) Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ que describe una rotación por $\pi/3$.

8 pts.

3. De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:
 Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

1 pts.

- (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que significan los vectores \vec{x} y \vec{b} .

1 pts.

- (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuántos chocolates y cuántas mentas contienen:
 - (i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B,
 - (ii) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B.

2 pts.

- (c) Determine si es posible conseguir
 - (i) 5 chocolates y 15 mentas,
 - (ii) 2 chocolates y 11 mentas,
 - (iii) 21 chocolates y 23 mentas,
 - (iv) 14 chocolates y 19 mentas.
 comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

Ejercicios voluntarios¹

5. Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Demuestre que no existe $\vec{y} \neq 0$ tal que $M\vec{y} \perp \vec{y}$.
(b) Encuentre todos los vectores $\vec{x} \neq 0$ tal que $M\vec{x} \parallel \vec{x}$. Para cada tal \vec{x} , encuentre $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Responda a las siguientes preguntas y justifique su respuesta.

- (a) ¿Cuántos $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ existen tal que la primera componente de $A\vec{x}$ sea igual a 3?
(b) Encuentre todos los $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ con $x_1 = 2$ que satisfacen $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

7. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$ y considere la ecuación

$$A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que (*) tiene exactamente una solución para \vec{x} .
(b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que (*) tiene infinitas soluciones para \vec{x} .
(c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que (*) tiene ninguna solución para \vec{x} .
(d) Haga lo mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en vez de (*).
(e) Haga lo mismo para $A_k \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ en vez de (*) donde $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ es un vector arbitrario distinto de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.