

Álgebra lineal

Taller 1

Sistemas lineales; espacios vectoriales.

Fecha de entrega: 02 de febrero de 2023

8 pts.

1. Encuentre todas las soluciones de los siguientes sistemas y visualice las ecuaciones y las soluciones en el plano.

(a) $3x + 5y = 7, \quad -9x - 15y = 10,$

(b) $2x + 5y = 10, \quad x + 2y + 3 = 0,$

(c) $2x + y = 4, \quad 3x - 2y = -1, \quad 5x + 3y = 7,$

(d) $x + 5y = 3, \quad -3x + 2y = 8, \quad 2x + 3y = -1.$

2 pts.

2. (a) Encuentre todos los números k tal que el siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución y calcule esta solución.

$$kx + 5y = 0, \quad 3x + (2 + k)y = 0.$$

Qué pasa para los otros k ?

2 pts.

- (b) Haga lo mismo para el sistema

$$kx + 5y = 5, \quad 3x + (2 + k)y = -3.$$

3 pts.

3. En una bodega hay soluciones de un cierto químico con concentraciones de 1% y de 13%. ¿Cuántos mililitros de cada una de las soluciones disponibles se requieren para obtener 500 ml de una solución de este químico con concentración de 5%?

5 pts.

4. De todos los siguientes conjuntos diga si es un espacio vectorial con su suma y producto usual y justifique su respuesta bien.

(a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$

(c) V es el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(d) V es el conjunto de todas las funciones f continuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(4) = 1$.

Ejercicios voluntarios¹

5. Repita el ejercicio 2 pero con el sistema

- $kx + 2y = 0$, $2x - (3 + k)y = 0$ en el literal (a) y
- $kx + 2y = 6$, $2x - (3 + k)y = -3$ en el literal (b).

6. Considere la ecuación

$$3x + 4y = 5. \quad (*)$$

- (a) ¿Existe otra ecuación lineal tal que la solución del sistema de (*) y la nueva ecuación es $(3, -1)$? Encuentre tal ecuación o diga por qué no existe.
- (b) ¿Existen otras dos ecuaciones lineales tal que la solución del sistema de (*) y las nuevas ecuaciones es $(3, -1)$? Encuentre tales ecuaciones o diga por qué no existen.
- (c) ¿Existe otra ecuación lineal tal que la solución del sistema de (*) y la nueva ecuación es $(2, -3)$? Encuentre tal ecuación o diga por qué no existe.
- (d) ¿Existen otras dos ecuaciones lineales tal que la solución del sistema de (*) y las nuevas ecuaciones es $(2, -3)$? Encuentre tales ecuaciones o diga por qué no existen.
- (e) Encuentre otra ecuación lineal tal que el sistema de (*) y la nueva ecuación no tenga solución.
- (f) Encuentre otra ecuación lineal tal que el sistema de (*) y la nueva ecuación tenga infinitas soluciones.

Recuerde que un *espacio vectorial sobre* \mathbb{R} es un conjunto V con una *suma* $u + v \in V$ para $u, v \in V$ y un *producto* $\lambda v \in V$ para $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los siguiente se tiene:

- (I) *asociatividad*: $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$,
- (II) *conmutatividad*: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$,
- (III) *elemento neutral*: Existe un $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} + v = v$ para todo $v \in V$,
- (IV) *inverso aditivo*: Para todo $v \in V$ existe un elemento $\tilde{v} \in V$ tal que $v + \tilde{v} = \mathbf{0}$,
- (V) $1v = v$.
- (VI) *compatibilidad*: $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$,
- (VII) *distributividad*: $\lambda(v + u) = \lambda v + \lambda u$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v, u \in V$,
 $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $v \in V$.

7. Demuestre lo siguiente:

- (a) El elemento neutral es único.
- (b) $0v = \mathbf{0}$ para todo $v \in V$.
- (c) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (d) Dado $v \in V$, su inverso \tilde{v} es único.
- (e) Dado $v \in V$, su inverso \tilde{v} cumple $\tilde{v} = (-1)v$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.