Álgebra lineal

Taller 14

Bases ortogonales; valores y vectores propios. Fecha de entrega: 24 de noviembre de 2022

1. Sea $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

1 pts. (a) Sea $P(0, 2, 5)$. Encuentre el punto $Q \in U$ que esté más cercano a P y calcule la distancia entre P y Q.

1 pts. (b) ¿Hay un punto $R \in U$ que esté a una distancia máximal de P?

1 pts. (c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre U (en la base estandar).

1 pts. 2. Sea $Q \in M(n \times n)$ una matriz ortogonal. Demuestre que para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\langle Q\vec{x}\,, Q\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}\,, \vec{y}\rangle.$$

Concluya que

1 pts. (a) Q no cambia magnitudes de vectores, es decir que $\|Q\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$;

1 pts. (b) Q no cambia ángulos entre vectores, es decir que $\sphericalangle(Q\vec{x}, Q\vec{y}) = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

5 pts. 3. Dados la matriz A y los vectores u y w:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -18 \\ -30 & -20 & 36 \\ -6 & -6 & 16 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Diga si los vectores u y w son autovectores de A. Si lo son, cuáles son los valores propios correspondientes?

(b) Calcule todos los valores propios de A.

6 pts. 4. Encuentre los vectores y espacios propios de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3 pts. 5. Encuentre los valores propios, los espacios propios y el polinomio característico de la siguiente matriz $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Hint. Encuentre la dimensión del kernel de A. ¿Qué nos dice sobre el polinomio característico? Después mire la imagen.

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientesy encuentre una base ortonormal de $U = \operatorname{span}\{\vec{v}, \vec{w}\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

7. Encuentre una base ortonormal de $U^\perp$ donde $U = \operatorname{gen}\{(1,0,2,4)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

8. Sea V un espacio vectorial y sean $U, W \subseteq V$ subespacios.
   (a) Demuestre que $U \cap W$ es un subespacio.
   (b) Demuestre que $\dim U + W = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)$.
   (c) Suponga que $U \cap W = \{0\}$. Demuestre que $\dim U \oplus W = \dim U + \dim V$.
   (d) Demuestre que $U^\perp$ es un subespacio de V y que $(U^\perp)^\perp = U$.

9. Encuentre los valores propios y los espacios propios de las siguientes matrices $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix},$$

10. (a) Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$. Demuestre que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre la matriz $Q(\alpha) \in M(2 \times 2)$ que describe rotación por α contra las manecillas del reloj.
   (c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Explique por qué es claro que $Q(\alpha)Q(\beta) = Q(\alpha + \beta)$. Use esta relación para concluir las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

11. Sea $Q \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Demuestre que es de la forma $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ o $Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ para un $\varphi \in \mathbb{R}$.

---

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Un *producto interno* es una función $\langle \cdot \,, \cdot \rangle : V \times V \to V$ tal que para todo $x, y, z \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

(I) $\langle x + \lambda y \,, z \rangle = \langle x \,, z \rangle + \lambda \langle y \,, z \rangle$, (Linealidad en la primera componente)

(II) $\langle x \,, z \rangle = \overline{\langle x \,, z \rangle}$ (Simetría; la barra significa conjugación compleja.)

(III) $\langle x \,, x \rangle \geq 0$,

(IV) $\langle x \,, x \rangle = 0 \iff x = 0$,

Observe que

- (i) y (iii) implican $\langle x \,, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x \,, y \rangle + \langle x \,, z \rangle$,
- (ii) implica que $\langle x \,, x \rangle \in \mathbb{R}$

Definición. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ y sean $x, y \in V$. Entonces x *es ortogonal a* y si y solo si $\langle x \,, y \rangle = 0$. Notación en este caso: $x \perp y$.

Ejemplos. El producto punto en $\mathbb{R}^n$ es un producto interno. Más ejemplos hay en Ejercio 2.

Definición. Sea $A \in m(n \times n)$. Entonces la *matriz adjunta* es aquella que conseguimos de A al transponerla y conjugar sus entradas (como números complejos).

Ejemplos. $\begin{pmatrix} 3 + \imath & 5 - 4\imath \\ 8 & 9\imath \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 3 - \imath & 8 \\ 5 + 4\imath & -9\imath \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 + 2\imath & 3 + 4\imath \\ 5 + 6\imath & 7 + 8\imath \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 - 2\imath & 5 - 6\imath \\ 3 - 4\imath & 7 - 8\imath \end{pmatrix}$.

Ejercicios.

1. (a) Demuestre que lo siguiente define un producto interno en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle \vec{x} \,, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \qquad \text{para } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t, \ \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n.$$

(b) Sea $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Demuestre que A^* es la única matriz con

$$\langle Ax \,, y \rangle = \langle x \,, A^* y \rangle \qquad \text{para todo } \ x, y \in \mathbb{C}^n.$$

2. (a) Sea V el espacio de todas la funciones continuas $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Claramente V es un espacio vectorial. Demuestre que lo siguiente define un producto interno en V:

$$\langle f \,, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \text{para } f, g \in V. \tag{1}$$

(b) Demuestre que el sistema de las funciones

$$v_0(x) = 1, \ v_n(x) = \sin(n\pi x), \ w_n(x) = \cos(n\pi x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

es un sistema ortogonal en $C[0, 1]$ con el product interno definido en (1).

(c) Aplique el proceso de Gram-Schmidt a $p_0 = 1, \ p_1 = x, \ p_2 = x^2, \ p_3 = x^3$ para obtener una base ortonormal $\{q_0, \dots, q_3\}$ de P_3 con el product interno definido en (1).

Observación. Salvo constantes multiplicativos, el polinomio q_j es el *poliniomo j-ésimo de Legendre.*

Definición. Sean U, V espacios vectoriales con normas $\|\cdot\|_U$ y $\|\cdot\|_V$. Una función lineal $T : U \to V$ se llama *isometría* si para todo $u \in U$

$$\|Tu\|_V = \|u\|_U.$$

Es claro que isometrías son inyectivas (porque si $Tu = 0$, entonces $\|u\|_U = \|Tu\|_V = 0$, por tanto $u = 0$).

Ejemplos.

- Rotaciones en $\mathbb{R}^n$.
- Reflexiones en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios.

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $Q, T \in M(n \times n)$.
   (a) Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T\vec{x}, T\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ (es decir: una isometría mantiene ángulos).
   (b) Demuestre que Q es una matriz ortogonal si y solo si Q es una isometría.

Definición. Un *grupo* es un conjunto no-vacío G junto con una operación $G \times G \to G$ tal que:

(I) *Existencia de un elemento neutro:* existe un $e \in G$ tal que $eg = ge = g$ para todo $g \in G$.

(II) *Existencia de inversos:* para todo $g \in G$ existe un $\widetilde{g} \in G$ tal que $g\widetilde{g} = \widetilde{g}g = e$.

(III) *Asociatividad:* para todo $g, h, k \in G$ se tiene que $(gh)k = g(hk)$.

El grupo G se llama *conmutativo* si además $gh = hg$ para todo $g, h \in G$.

Ejemplos.

(I) $\mathbb{Z}$ con la suma;

(II) $\mathbb{Q}$ con la suma;

(III) $\mathbb{R}$ con la suma;

(IV) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con el producto;

(V) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con el producto;

(VI) funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la suma;

(VII) $M(n \times n)$ con la suma;

(VIII) cada espacio vectorial con su suma;

(IX) funciones biyectivas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la composición;

(X) $\{A \in M(n \times n) : \det(A) \neq 0\}$ con producto;

(XI) funciones lineales biyectivas $V \to V$ con la composición donde V es un espacio vectorial.

Los ejemplos (i)–(viii) son grupos conmutativos; los ejemplos (ix)-(xi) son no-conmutativos para $n \geq 2$.

Ejercicios.

1. Demuestre que los ejemplos arriba son grupos.

2. Sean $O(n) = \{Q \in M(n \times n) : Q \text{ es matriz ortogonal}\}$ y $SO(n) = \{Q \in O(n) : \det Q = 1\}$.

   (a) Demuestre que $O(n)$ con la composición es un grupo. Es decir, hay que probar que:

      (I) Para todo $Q, R \in O(n)$, la composición QR es un elemento en $O(n)$.

      (II) Existe un $E \in O(n)$ tal que $QE = Q$ y $EQ = Q$ para todo $Q \in O(n)$.

      (III) Para todo $Q \in O(n)$ existe un elemento inverso $\widetilde{Q}$ tal que $\widetilde{Q}Q = Q\widetilde{Q} = E$.

   (b) ¿Es $O(n)$ conmutativo (es decir, se tiene $QR = RQ$ para todo $Q, R \in O(n)$)?

   (c) Demuestre que $SO(n)$ con la composición es un grupo.