Álgebra lineal

Taller 13

Representación matricial de transformaciones lineales.
Bases ortonormales.

Fecha de entrega: 17 de noviembre de 2022

1. En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $E: 2x - y + z = 0$. Sea Q la proyección ortogonal sobre E.

2 pts. (a) Encuentre la representación matricial de Q (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$).

2 pts. (b) Encuentre el kernel de Q y dé una interpretación geométrica.

2 pts. (c) Encuentre la imagen de Q y dé una interpretación geométrica.

Sugerencia: Primero encuentre una base de $\mathbb{R}^2$ adaptada al problema y encuentre la representación matricial con respecta a esta base. Después haga un cambio de base para conseguir una reprsentación matricial con respecto a la base canónica.

2. Considere el plano E en $\mathbb{R}^3$ dado por $x + y - 3z = 0$.

2 pts. (a) Encuentre una base ortonormal para E.

2 pts. (b) Complete la base encontrada en el literal anterior a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

3. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal de U.

2 pts. (b) Encuentre la dimensión de U y la dimensión de su complemento ortogonal.

4. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y sea $U = \operatorname{span}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

2 pts. (a) Demuestre que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente independientes.

2 pts. (b) Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal de U.

2 pts. (c) Encuentre una base de $U^{\perp}$.

Ejercicios voluntarios[1]

---

5. (a) Complete $\begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{15/16} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(b) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

(c) Complete $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántas posibilidades hay para hacerlo?

6. Sea $W = \text{gen}\{(1,1,1,1)^t,\ (2,1,1,0)^t\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Encuentre una base ortogonal de W.

(b) Sean $A_1(1,2,0,1)$, $A_2(11,4,4,-3)$, $A_3(0,-1,-1,0)$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Para cada $j = 1,2,3$ encuentre el punto $P_j \in W$ que esté más cercano a A_j y calcule la distancia entre A_j y P_j.

(c) Encuentre la matriz que representa la proyección ortogonal sobre W (en la base estandar).

7. En $\mathbb{R}^2$ considere la recta $L : 2x - 3y = 0$. Sea P la proyección ortogonal sobre L.

(a) Encuentre la representación matricial de P (con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$).

(b) Encuentre el kernel de P y dé una interpretación geométrica.

(c) Encuentre la imagen de P y dé una interpretación geométrica.