Álgebra lineal

Taller 11

Kernels, imágenes de funciones lineales. Fecha de entrega: 03 de noviembre de 2022

---

4 pts. 1. De las siguientes matrices, encuentre una base del kernel y de la imagen y las dimensiones correspondientes.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2 pts. (a) Demuestre que E y F son invertibles. Describa cómo actuan geométricamente en $\mathbb{R}^2$.

2 pts. (b) Calcule $\operatorname{Im}(A)$, $\ker(A)$ y sus dimensiones. Dibuja $\operatorname{Im}(A)$ y $\ker(A)$, diga qué objetos geométricos son.

2 pts. (c) Calcule $\operatorname{Im}(A)$, $\operatorname{Im}(FA)$, $\operatorname{Im}(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuól es la relación entre ellos.

2 pts. (d) Calcule $\ker(A)$, $\ker(FA)$, $\ker(AE)$ y sus dimensiones. Dibújalos y diga cuól es la relación entre ellos.

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in M(m \times n)$.

2 pts. (a) ¿Cuáles son las dimensiones posibles de $\ker A$ y $\operatorname{Im} A$?

2 pts. (b) Para cada $j = 0, 1, 2, 3$ encuentre una matriz $A_j \in M(2 \times 3)$ con $\dim(\ker A_j) = j$, es decir: encuentre matrices A_0, A_1, A_2, A_3 con $\dim(\ker A_0) = 0,\ \dim(\ker A_1) = 1, \ldots$. Si tal matriz no existe, explique por qué no existe.

1 pts. 4. (a) Encuentre por lo menos dos diferentes funciones lineales biyectivas de $M(2 \times 2)$ a P_3.

1 pts. (b) Existe una función lineal biyectiva $S : M(2 \times 2) \to P_k$ para $k \in \mathbb{N},\ k \neq 2$?

2 pts. 5. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Escriba los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ como combinaciones lineales de de la base $\mathcal{B}$.

Ejercicios voluntarios[1]

6. Sean $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Suponga que $\vec{w} \neq \vec{0}$ y que $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los vectores $\vec{v}_j$. Demuestre que $\vec{w} \notin \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$. Se sigue que el sistema $\vec{w}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ es linealmente independiente?

7. Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre:

   (i) A inyectiva $\Longrightarrow m \geq n$.

   (ii) A sobreyectiva $\Longrightarrow n \geq m$.

   Demuestre que la implicación "$\Longleftarrow$" en (i) and (ii) en general es falsa.

8. Sea $A \in M(m \times n)$ y suponga que A es biyectivo. Demuestre que $m = n$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.