Álgebra lineal

Taller 10

Bases y dimensión.

Fecha de entrega: 27 de octubre de 2022

---

6 pts.

1. Sea V un espacio vectorial. Falso o verdadero? Justifique su respuesta.

(a) Suponga $v_1, \dots, v_k, u, z \in V$ tal que z es combinación lineal de los $v_1, \dots, v_k$. Entonces z es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k, u$.

(b) Si u es combinación lineal de $v_1, \dots, v_k \in V$, entonces $v_1, \dots, v_k, u$ es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(c) Si $v_1, \dots, v_k \in V$ es un sistema de vectores linealmente dependientes, entonces v_1 es combinación lineal de los $v_2, \dots, v_k$.

4 pts.

2. De las siguientes matrices, encuentre una base del kernel y su dimensión.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 25 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 pts.

3. Determine si las siguientes funciones son lineales. Si lo son, calcule el kernel y la dimensión del kernel.

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to M(2 \times 2),\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(b) $B : \mathbb{R}^3 \to M(2 \times 2),\ B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x - z \\ x + y - 3z & z \end{pmatrix}$,

(c) $C : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), \quad C(M) = M + M^t$

(d) $D : P_3 \to P_4, \quad Dp = p' + xp$,

(e) $S : P_3 \to M(2 \times 3), \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a + b & b + c & c + d \\ 0 & a + d & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicios voluntarios[1]

---

4. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea V el conjunto de las matrices simétricas $n \times n$ con la suma y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ usual.

(a) Demuestre que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Encuentre matrices que generan V. ¿Cual es el número mínimo de matrices que se necesitan para generar V?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

5. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son bases del espacio vectorial indicado.

(a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\mathbb{R}^2$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; $M(2 \times 2)$.

(c) $p_1 = 1 + x,\ p_2 = x + x^2,\ p_3 = x^2 + x^3,\ p_4 = 1 + x + x^2 + x^3;\quad P_3$.

6. (a) (I) Encuentre una base para el plano $E : x - 2y + 3z = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

(II) Complete la base encontrado en (i) a una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sea $F := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\}$.

(I) Demuestre que F es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

(II) Encuentre una base para F y calcule $\dim F$.

(III) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Sea $G := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^t : 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.

(I) Demuestre que G es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

(II) Encuentre una base para G y calcule $\dim G$.

(III) Complete la base encontrada en (ii) a una base de $\mathbb{R}^4$.

7. (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determine si estos vectoren generan el espacio $\mathbb{R}^3$. Si lo hacen, escoja una base de $\mathbb{R}^3$ de los vectores dados.

(b) Sean $C_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determine si estas matrices generan el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2. Si lo hacen, escoja una base de las matrices dadas.

(c) Sean $p_1 = x^2 + 7, p_2 = x + 1, p_3 = 3x^3 + 7x$. Determine si los polinomios p_1, p_2, p_3 son linealmente independientes. Si lo son, complételos a una base en P_3.

8. Determine si $\text{gen}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\} = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ para

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

9. Para los siguientes sistemas de vectores en el espacio vectorial V, determine la dimensión del espacio vectorial generado por ellos y escoja un subsistema de ellos que es base del espacio vectorial generado por los vectores dados. Complete este subsistema a una base de V.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $V = P_4$, $p_1 = x^3 + x,\ p_2 = x^3 - x^2 + 3x,\ p_3 = x^2 + 2x - 5,\ p_4 = x^3 + 3x + 2$.

(c) $V = M(2 \times 2)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Sean V y W espacios vectoriales.

(a) Sea $U \subset V$ un subspacio y sean $u_1, \ldots, u_k \in U$. Demuestre que $\operatorname{gen}\{u_1, \ldots u_k\} \subset U$.

(b) Sean $u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_m \in V$. Demuestre que lo siguiente es equivalente:

(I) $\operatorname{gen}\{u_1, \ldots, u_k\} = \operatorname{gen}\{w_1, \ldots, w_m\}$.

(II) Para todo $j = 1, \ldots, k$ tenemos $u_j \in \operatorname{gen}\{w_1, \ldots, w_m\}$ y para todo $\ell = 1, \ldots, m$ tenemos $w_\ell \in \operatorname{gen}\{u_1, \ldots, u_k\}$.

(c) Sean $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m \in V$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\operatorname{gen}\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\} = \operatorname{gen}\{v_1 + cv_2, v_2, v_3, \ldots, v_m\}.$$

(d) Sean $v_1, \ldots, v_k \in V$ y sea $A : V \to W$ una función lineal invertible. Demuestre que $\dim \operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_k\} = \dim \operatorname{gen}\{Av_1, \ldots, Av_k\}$. ¿Es verdad si A no es invertible?