Álgebra lineal

Taller 9

Combinaciones lineales; independencia lineal. Fecha de entrega: 20 de octubre de 2022

---

1 pts. **1.** (a) Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Escriba $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

1 pts. (b) ¿Es $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ combinación lineal de $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$?

1 pts. (c) ¿Es $A = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 50 & 8 \end{pmatrix}$ combinación lineal de
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$?

3 pts. **2.** Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Sea E el plano $E = \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(a) Escriba E en la forma $E : ax + by + cz = d$.
(b) Encuentre un vector $w \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, tal que $\operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, w\} = E$.
(c) Encuentre un vector $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$.

3 pts. **3.** (a) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M_{\text{sym}}(2 \times 2) \setminus \operatorname{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

3 pts. (b) ¿El siguiente conjunto genera las matrices simétricas 2×2?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M_{\text{sym}}(2 \times 2) \setminus \operatorname{span}\{B_1, B_2, B_3\}$.

3 pts. (c) ¿El siguiente conjunto genera las matrices triangulares superiores 2×2?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si no lo hace encuentre una matriz $T \in M(2 \times 2)$ que es triangular superior pero que no pertenece a $\operatorname{span}\{A_1, A_2, A_3\}$.

1 pts. **4.** (a) ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?

1 pts. (b) ¿Los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$?

1 pts. (c) ¿Los vectores $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes en $M(2 \times 3)$?

2 pts. (d) ¿Los vectores $p_1 = X^2 - X + 2$, $p_2 = X + 3$, $p_3 = X^2 - 1$ son linealmente independientes en P_2? ¿Son linealmente independientes en P_n para $n \geq 3$?

Ejercicios voluntarios[1]

5. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

6. (a) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
(b) ¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
(c) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?
(d) ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
(e) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?
(f) ¿Es $\mathbb{Q}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

7. Sea F el plano dado por $F : 2x - 5y + 3z = 0$.

(a) Demuestre que F es subespacio de $\mathbb{R}^3$ y encuentre vectores $\vec{u}$ y $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}\}$.
(b) Encuentre un vector $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, distinto de $\vec{u}$ y $\vec{w}$, tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}\} = F$.
(c) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\text{gen}\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^3$.

8. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y sea $U = \text{span}\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2\}$.

2 pts. (a) Diga qué es U geométricamente.
1 pts. (b) Encuentre tres vectores diferentes en U.
1 pts. (c) Encuentre tres vectores diferentes en $\mathbb{R}^3$ que no pertenecen a U.
2 pts. (d) ¿Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}, \vec{b}$ pertenecen a U?

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.