Álgebra lineal

Taller 8

Espacios vectoriales. Fecha de entrega: 13 de octubre de 2022

---

8 pts.

1. Calcule $\det B_n$ donde B_n es la matriz en $M(n \times n)$ cuyas entradas en la diagonal son 0 y todas las demás entradas son 1, es decir:

$$B_1 = 0, \;\; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

¿Cómo cambia la respuesta si en vez de 0 hay x en la diagonal?

6 pts.

2. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. De la siguiente lista escoja 6 numerales y diga si o no son subespacios de $M(m \times n)$. Pruebe su afirmación.

(I) Todas matrices con $a_{11} = 0$.
(II) Todas matrices con $a_{11} = 3$.
(III) Todas matrices con $a_{12} = \mu a_{11}$ para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo.
(IV) Todas matrices cuya primera columna coincide con la última columna.

Para los siguientes numerales supongamos que $m = n$.

(V) Todas las matrices simétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = A$) .
(VI) Todas las matrices que no son simétricas.
(VII) Todas las matrices antisimétricas (es decir, todas las matrices A con $A^t = -A$).
(VIII) Todas las matrices diagonales.
(IX) Todas las matrices triangular superior.
(X) Todas las matrices triangular inferior.
(XI) Todas las matrices invertibles.
(XII) Todas las matrices no invertibles.
(XIII) Todas las matrices con $\det A = 1$.

3. Considere los sistemas de ecuaciones lineales

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned} \right\}, \qquad (2) \quad \left\{ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 5y + 6z &= 9 \\ 7x + 8y + 9z &= 15 \end{aligned} \right\}.$$

Sea U el conjunto de todas las soluciones de (1) y W el conjunto de todas las soluciones de (2). Note que se pueden ver como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

3 pts. (a) Demuestre que U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y descríbalo geométricamente.
1 pts. (b) Demuestre que W no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
2 pts. (c) Demuestre que W es un subespacio afín de $\mathbb{R}^3$ y descríbalo geométricamente.

Ejercicios voluntarios[1]

4. El objetivo de este ejercicio es entender qué pasa con una matriz dada si la mulitiplicamos desde el lado derecho con una matriz elemental.

   Sea $A \in M(m \times n)$ y sea E una matriz elemental.

   (a) Demuestre que $(AE)^t = FA^t$ donde F es una matriz elemental. Diga cuál matriz es F (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c), Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).

   (b) Use que $AE = ((AE)^t)^t$ y su resultado de (a) para describir en palabras como cambia A si la multiplicamos por el lado derecho con E (debe distinguir entre los tres tipos que E puede ser: $S_i(c), Q_{ij}(c)$ o P_{ij}).

5. (a) Sea $A \in M(n \times n)$. Demuestre que $A + A^t$ es una matriz simétrica y que $A - A^t$ es una matriz antisimétrica.

   (b) Demuestre que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. (Es decir: Si $A \in M(n \times n)$, entonces existen matrices $B, C \in M(n \times n)$ tal que B es simétrica, C es antisimétrica y $A = B + C$.)

6. Sea U un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathbb{R}^n \setminus U$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{2.5 pts.}}$ 7. (a) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_2 + y_1 \end{pmatrix},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

$\boxed{\text{2.5 pts.}}$ (b) Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\boxplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \lambda \boxdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Es $\mathbb{R}^2$ con esta suma y producto con escalares un espacio vectorial?

8. Sean $A \in M(m \times n)$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

(a) Demuestre que $U = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

(b) Demuestre que $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(c) ¿Los conjuntos $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = (1, 1, \dots, 1)^t\}$ y $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \neq \vec{0}\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$?

(d) Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^k$ fijo. ¿El conjunto $T = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^k$?

(e) ¿Los conjuntos

$$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| = 1\}, \quad B_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \leq 1\}, \quad F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| \geq 1\}$$

son subespacios de $\mathbb{R}^k$?