

Álgebra lineal

Transposición de matrices; determinantes.

Fecha de entrega: 29 de septiembre de 2022

2 pts. 1. (a) Sea $A \in M(m \times n)$. Demuestre que AA^t y A^tA son matrices simétricas.

3 pts. (b) Calcule $(S_j(c))^t, (Q_{ij}(c))^t, (P_{ij})^t$.

6 pts. 2. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

6 pts. 3. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que las siguientes matrices son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & x & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11-x & 5 & -50 \\ 3 & -x & -15 \\ 2 & 1 & -x-9 \end{pmatrix}.$$

1 pts. 4. Encuentre por lo menos cuatro matrices 3×3 cuyo determinante es 18.

2 pts. 5. Escoja dos de las siguientes afirmaciones y diga si son verdaderas o falsas y pruebe sus respuestas.

- (a) Si A es una matriz simétrica invertible, entonces A^{-1} es simétrica.
- (b) Si A, B son matrices simétricas, entonces AB es simétrica.
- (c) Si AB es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
- (d) Si A, B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es simétrica.
- (e) Si $A + B$ es una matriz simétrica, entonces A, B son matrices simétricas.
- (f) Si A es una matriz simétrica, entonces A^t es simétrica.
- (g) $AA^t = A^tA$.

Ejercicios voluntarios¹

6. De las siguientes matrices calcule el determinante. Determine si las matrices son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -14 & 21 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. Sea $A \in M(m \times n)$.

¹Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de ninguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

- (a) Demuestre que $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$.
- (b) Sea $B \in M(n \times m)$ y suponga que $\langle B\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^t\vec{y} \rangle$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $B = A^t$.
- (c) Demuestre que $\langle AA^t\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.