Álgebra lineal

Taller 6

Matrices inversas; matrices elementales. Fecha de entrega: 22 de septiembre de 2022

8 pts. **1.** De las siguientes matrices determine si son invertibles. Si lo son, encuentre su matriz inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Una tienda vende dos tipos de cajitas de dulces:
Tipo A contiene 1 chocolate y 3 mentas, Tipo B contiene 2 chocolates y 1 menta.

1 pts. (a) Dé una ecuación de la forma $A\vec{x} = \vec{b}$ que describe lo de arriba. Diga que siginifican los vectores $\vec{x}$ y $\vec{b}$.

1 pts. (b) Calcule, usando el resultado de (a), cuántos chocolates y cuántas mentas contienen:

(i) 1 caja de tipo A y 3 de tipo B,
(ii) 3 cajas de tipo A y 5 de tipo B.

4 pts. (c) Determine si es posible conseguir

(i) 5 chocolates y 15 mentas,
(ii) 2 chocolates y 11 mentas,
(iii) 21 chocolates y 23 mentas,
(iv) 14 chocolates y 19 mentas.

comprando cajitas de dulces en la tienda. Si es posible, diga cuántos de cada tipo se necesitan.

6 pts. **3.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

(a) Escriba A y A^{-1} como producto de matrices elementales.

(b) Use el resultado de (a) para encontrar A^{-1}.

Ejercicios voluntarios[1]

---

4. (a) Sea $P_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2\times 2)$. Demuestre que P_{12} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{ij}(c)$ y $S_k(c)$.

(b) Pruebe el caso general: Sea $P_{ij} \in M(n \times n)$. Demuestre que P_{ij} se deja expresar como producto de matrices elementales de la forma $Q_{kl}(c)$ y $S_m(c)$.

Observación: El ejercicio demuestra que en verdad solo hay dos tipos de matrices elementales ya que el tercero (las permutaciones) se dejan reducir a un producto apropiado de matrices de tipo $Q_{ij}(c)$ y $S_j(c)$.

[1] Los ejercicios voluntarios no aportan a la nota de niguna forma. Si los entregan de forma ordenada y bien legibles, intentaremos calificarlos para fines de retroalimentación.

5. Para las sigientes matrices encuentre matrices elementales $E_1, \dots, E_n$ tal que $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n \cdot A$ es de la forma triangular superior.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Sean $R, S \in M(n,n)$ matrices invertibles. Demuestre que

$$RS = SR \quad \iff R^{-1}S^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

7. (a) Sea $A \in M(m \times n)$ y sean $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{y}$.

   (b) Demuestre que el espacio $M(m \times n)$ es un espacio vectorial con la suma de matrices y producto con $\lambda \in \mathbb{R}$ definido en clase.

8. **Inversa de una matriz a bloques.** Sean A, B, C, D matrices $n \times n$ y suponga que A es invertible. Consideramos la matriz a bloques

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

.

   (a) Demuestre que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

   (b) Demuestre que $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$ son invertibles y encuentre sus inversas.

   (c) Demuestre que, bajo la hipótesis que A es invertible, la matrix $\mathcal{T}$ es invertible si y solo si $C - CA^{-1}B$ lo es. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{id} & -A^{-1}B \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}\left\{A + B[D - CA^{-1}B)^{-1}C\right\} & -A^{-1}B[D - CA^{-1}B]^{-1} \\ -[D - CA^{-1}B]^{-1}CA^{-1} & [D - CA^{-1}B]^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (d) Verifique que para el caso cuando A, B, C, D son números coincide con la fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   (e) ¿Cómo serían la fórmulas si asumimos que D es invertible?